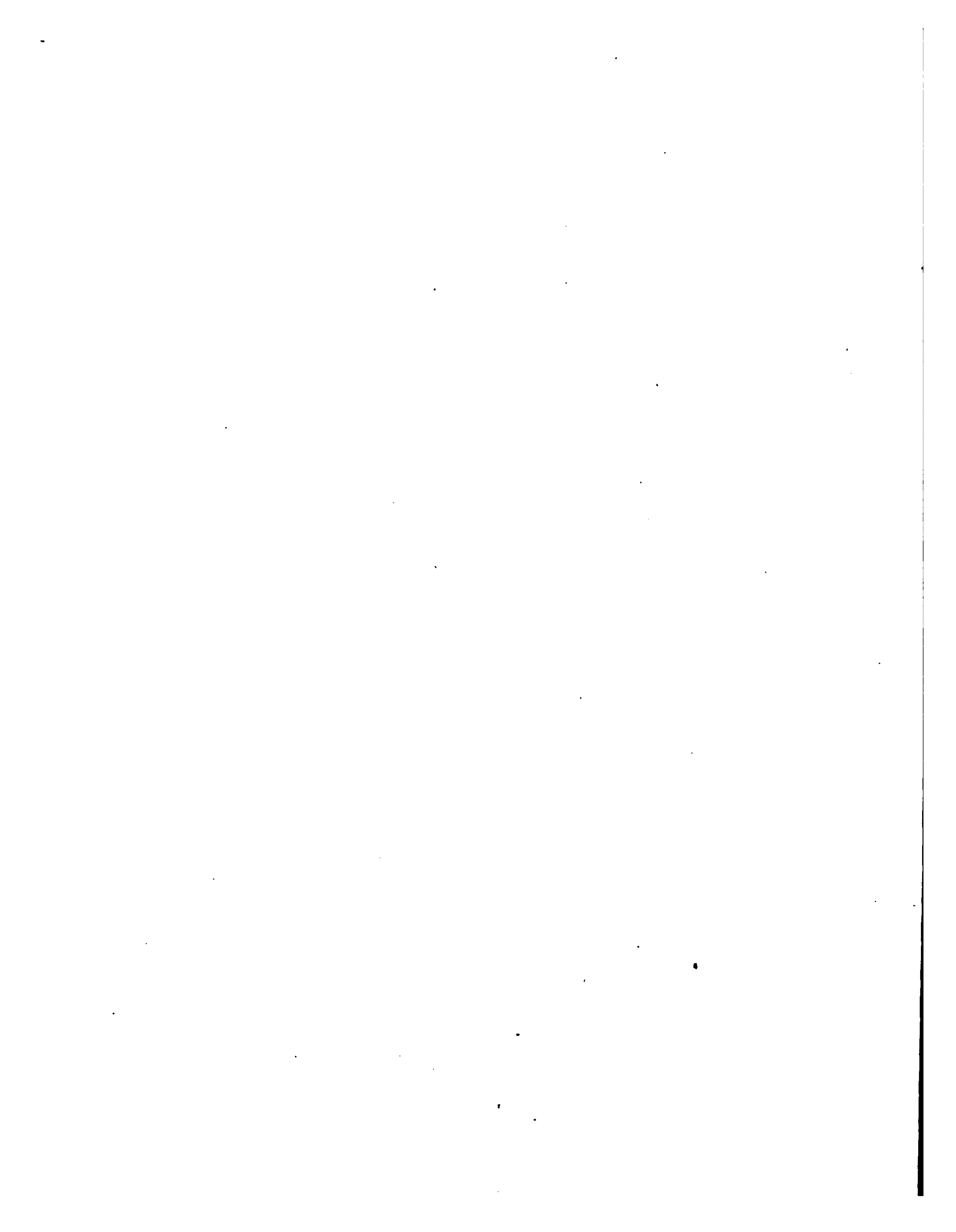






ÜBER BERNOULLISCHE ZAHLEN UND FUNKTIONEN, WELCHE ZU EINER FUNDAMENTALDISKRIMINANTE GEHÖREN, UND DEREN ANWENDUNG AUF DIE SUMMATION UNENDLICHER REIHEN

INAUGURALDISSERTATION

ZUR BEWERBUNG UM DIE DOKTORWÜRDE

DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT ROSTOCK

VORGELEGT VON

PAUL DOLZE

AUS DRESDEN

DRESDEN 1907

DRUCK VON B. G. TEUBNER

Von der philosophischen Fakultät der Universität Rostock genehmigt
am 4. Februar 1907.

Referent: Staatsrat Prof. Dr. STAUDE.

Über Bernoullische Zahlen und Funktionen, welche zu einer Fundamentaldiskriminante gehören, und deren Anwendung auf die Summation unendlicher Reihen.

Von **Paul Dolze.**

Einleitung.

Das tiefliegende Gesetz der Abhängigkeit der Klassenanzahl quadratischer Formen von ihrer Determinante ist seit Gauß des öfteren Gegenstand von Untersuchungen gewesen; insbesondere gebührt Dirichlet das Verdienst, diesen Zusammenhang zuerst klar erkannt und einwandsfrei zur Darstellung gebracht zu haben. Ihm an Bedeutung gleich ist Kronecker, der die Dirichletschen Methoden aufnahm und erweiterte. Bedeutet $D = b^2 - ac$ die durch kein Quadrat außer 1 teilbare Determinante der eigentlich primitiven Form:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

so ist die Klassenanzahl dieser Form:

$$H(D) = \frac{2}{\vartheta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n},$$

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{D}} \log (T + U\sqrt{D}) \text{ für } D > 0, \qquad \vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{-D}} \text{ für } D < 0;$$

T und U sind die Fundamentallösung der Pellschen Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1,$$

$\left(\frac{D}{n}\right)$ bedeutet das Jakobische Symbol.

Hierbei besteht die Schwierigkeit hauptsächlich in der Ermittlung des Wertes der unendlichen Reihe:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n},$$

welche Aufgabe Dirichlet[1]) für die einzelnen Formen der Determinante auf doppeltem Wege gelöst hat. Die erste dieser Methoden besteht in der Umwandlung des Ausdruckes $\frac{1}{n}$ mittels der bestimmten Integralformel:

$$\frac{1}{n} = \int_0^1 x^{n-1}\, dx$$

und in einer dann folgenden Integration, die zweite in der Anwendung der Gaußschen Summen, mit deren Hilfe das allgemeine Glied durch eine endliche trigonometrische Reihe ersetzt und damit die ganze

Summe in eine unendliche trigonometrische Reihe umgewandelt werden kann, deren Wert sich aus der Theorie dieser Reihen bestimmen läßt.

So ergeben sich z. B. folgende Werte für S:

$$S = -\frac{1}{2\sqrt{P}}\left(\frac{2}{P}\right)\sum_{h=0}^{P-1}(-1)^h\left(\frac{h}{P}\right)\cdot\log\operatorname{tang}\frac{h\pi}{2P} = -\frac{1}{\sqrt{P}}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{P}\right)\right)\sum_{h=0}^{P-1}\left(\frac{h}{P}\right)\log\sin\frac{h\pi}{P};\; D=P,\; P\equiv 1 \pmod 4.$$

$$S = \frac{\pi}{4\sqrt{P}}\left(\frac{2}{P}\right)\sum_{h=0}^{P-1}(-1)^h\left(\frac{h}{P}\right) = -\frac{\pi}{P\sqrt{P}}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{P}\right)\right\}\sum_{h=0}^{P-1}\left(\frac{h}{P}\right)\cdot h;\; D=-P,\; P\equiv 1 \pmod 4.$$

Aus diesen Angaben geht sofort hervor, daß für positive Determinanten das Problem bei weitem schwieriger zu lösen erscheint als für negative. Die Reihe S ist eine bedingt konvergente Reihe, definiert durch die Gleichung:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n} = \lim_{\varrho=0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}};$$

sie gehört zur Gruppe der Dirichletschen Reihen, welche in einer Anzahl von Arbeiten näher untersucht worden sind, unter denen hier nur auf eine Arbeit von Hurwitz[2]) besonders verwiesen werden soll.

Abgesehen von Kronecker, ist das Problem der Bestimmung der Klassenanzahl quadratischer Formen in letzter Zeit auch von anderen wiederholt in Angriff genommen worden. So transformiert z. B. Lerch[3]) im Anschluß an Dirichlet für negative Determinanten die Reihe:

$$H(-\Delta) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{k}\right)\frac{1}{k}, \qquad D = -\Delta,$$

in die folgende:

$$H(-\Delta) = -\frac{1}{\Delta}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu+1}-\frac{1}{\frac{h}{\Delta}+\mu}\right),$$

substituiert darin $h = \Delta - k$ und addiert die entstehende Gleichung gliedweise zur vorigen, woraus dann schließlich folgende Formel für die Klassenanzahl resultiert:

$$\sum_{h=0}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{\Delta} = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\,Cl(-\Delta).$$

Besondere Erwähnung betreffs der Formen mit negativer Determinante verdient ferner eine Arbeit von Hurwitz[4]), worin in tiefgehender Weise der Zusammenhang der Klassenanzahl mit den Koeffizienten gewisser Potenzreihen klargelegt wird, die man durch Entwicklung einiger gebrochener trigonometrischer Funktionen erhält.

Des weiteren sind auch die elliptischen Funktionen als Ausgangspunkt gewählt worden. So findet De Séguier[5]) mit Hilfe einer von Kronecker gegebenen Transformation der ϑ-Funktion den Ausdruck

$$K(D)\log E(D) = -\sum_{s=1}^{|D|}\left(\frac{D}{s}\right)\log\left(1-e^{\frac{2k\pi i}{|D|}}\right),\; E(D) = \frac{1}{2}\left(T+U\sqrt{D}\right).$$

Derselbe gilt zwar zunächst nur für negative Werte von D, zu ihm kann aber auch durch geeignete Substitution ein Analogon für positive Determinanten aufgestellt werden.

Für den Fall positiver Determinanten seien zwei Arbeiten von Lerch[6]) und Hurwitz[7]) hervorgehoben. Versteht man nach Kronecker unter einer Fundamentaldiskriminante D der quadratischen Formen:

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

eine Zahl D, die der Gleichung genügt:

$$D = b^2 - 4ac,$$

wobei a, b und c relative Primzahlen sind, so ist nach Lerch die Klassenanzahl dieser Formen darstellbar durch die Gleichung:

$$Cl(D)\cdot\log E(D) = 2\sqrt{\frac{D}{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty} e^{-x^2}dx + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\int_{\frac{m^2\pi}{Du}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x},$$

wobei u eine willkürliche positive Größe und $\left(\frac{D}{m}\right)$ das Legendresche Symbol in seiner Verallgemeinerung nach Kronecker bedeutet.

Hurwitz findet bei gegebener Determinante D folgende Ausdrücke für die Klassenanzahl h:

$$h = \frac{4}{3\pi}D^3\sqrt{D}\left[\frac{1}{D^3}\sum_{rs=D}\frac{1}{r+s} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+D)^3}\sum_{rs=n^2+D}\left(\frac{1}{r+s+2n}+\frac{1}{r+s-2n}\right)\right]$$

$$h = \frac{16}{15\pi}D^3\sqrt{D}\left[\frac{1}{D^3}\sum_{rs=D}\frac{1}{r+s} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+D)^3}\sum_{rs=n^2+D}\left(\frac{1}{r+s+2n}+\frac{1}{r+s-2n}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{D^2}\sum_{rs=D}\frac{1}{(r+s)^3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+D)^2}\sum_{rs=n^2+D}\left(\frac{1}{(r+s+2n)^3}+\frac{1}{(r+s-2n)^3}\right)\right].$$

Sowohl die Reihe von Lerch, als auch die von Hurwitz eignen sich trotz ihrer schwachen Konvergenz zur numerischen Berechnung, da ja die Klassenanzahl eine ganze Zahl ist, man also die sie darstellenden Reihen nur so weit zu berücksichtigen braucht, bis man sicher ist, daß der Betrag der vernachlässigten Glieder unterhalb 1 liegt.

Schließlich verdient hervorgehoben zu werden, daß die mehrfach erwähnte Dirichletsche Reihe für negative Determinanten in neuester Zeit noch von Glaisher[8]) auf anderem Wege summiert worden ist. Er benutzt ähnlich wie Lerch die Partialbruchentwicklung der Kotangente und Kosekante und verwandelt mit ihrer Hilfe die unendlichen Reihen in endliche, die sich wiederum durch Anwendung der Gaußschen Summen in die bekannten Formen bringen lassen.

Die bei den bisherigen Betrachtungen auftretende Reihe ist nur ein spezieller Fall von Reihen der Form:

$$\sum\left(\frac{D}{s}\right)\cdot f(s),$$

wobei $f(s)$ eine beliebige Funktion von s bedeutet. Tatsächlich sind nun außer dem Falle:

$$f(s) = \frac{1}{s}$$

sowohl andere spezielle, als auch ganz allgemeine Funktionen in Betracht gezogen worden. Unter den Arbeiten, welche sich auf andere spezielle Funktionen beziehen, heben wir zunächst eine Arbeit von Lerch[9]) hervor. Er untersucht darin den Ausdruck:

$$S_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\pi}\sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{2\nu\pi i\left(x+\frac{\alpha^2 m}{n}\right)}, \qquad m \text{ relativ prim zu } n.$$

Ist dann d ein Teiler von n, $\frac{n}{d}=d'$ auch ein Teiler von ν, so daß $\nu=\mu\cdot d'$, so ergibt sich aus obigem Ansatz für jedes d die Formel:

$$S_1(d) = \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu\pi}\left(\frac{m\mu}{d}\right)\sqrt{d}\cdot i^{\frac{1}{2}(d-1)^2}\cdot e^{2d'\mu x\pi i},$$

deren imaginäre Teile die Werte annehmen:

$$\Phi(z, d) = \sqrt{d}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\nu}{d}\right)\frac{\cos 2\nu\pi z}{\nu\pi} \qquad \text{für } d \equiv -1 \pmod 4),$$

$$\Phi(z, d) = \sqrt{d}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\nu}{d}\right)\frac{\sin 2\nu\pi z}{\nu\pi} \qquad \text{für } d \equiv 1 \pmod 4).$$

Vor allem aber werde auf eine Arbeit von Berger[10]) verwiesen. In derselben betrachtet Berger in systematischer Weise die Reihen:

$$\frac{v}{e^{v}-1}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\cdot e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}}$$

und

$$v\cdot\frac{e^{2v}-1}{e^{v}-1}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}}, \qquad \varepsilon=\pm 1,\ \varepsilon\Delta>0,$$

und definiert mit ihrer Hilfe eine neue Gattung von Zahlen und Funktionen, die er mit dem Namen von Bernoullischen Zahlen und Funktionen bezeichnet, die zur Diskriminante Δ gehören.

Von Arbeiten, die sich auf das allgemeine Problem beziehen, ist mir nur eine solche von De Séguier[11]) bekannt geworden. Ist $f(s)$ eine in eine Fouriersche Reihe entwickelbare Funktion, so läßt sich hiernach die Summe:

$$\sum_{s=1}^{|D|}\left(\frac{D}{s}\right)f(s)$$

durch eine unendliche Reihe ausdrücken, die im wesentlichen von den Koeffizienten der Fourierschen Reihe abhängt.

Mit derartigen allgemeinen Reihen beschäftigt sich nun auch die folgende Arbeit in erster Linie, und zwar nach Methoden, welche, soweit dem Verfasser bekannt, bisher noch nicht angewendet worden sind. Den Ausgangspunkt bildete die folgende Überlegung:

Bei der Summierung von Reihen der Form:

$$\sum_{r=1}^{\infty}f(a+rh)$$

zeigt sich die sogenannte Eulersche oder Maclaurinsche Summenformel von hervorragender Bedeutung. Diese Formel ist mehrfach erweitert worden. Aus der Zahl der hierauf bezüglichen Arbeiten möge jedoch nur eine von Krause[12]) besonders genannt werden, da dieselbe mit den späteren Untersuchungen in engstem Zusammenhange steht.

Es fragt sich nun, ob nicht für Reihen der Form:

$$\sum\left(\frac{D}{s}\right)f(s)$$

eine Formel gefunden werden kann, welche für deren Summation dasselbe leistet wie die Eulersche und die angedeuteten weitergeführten Summenformeln für die Reihen:

$$\sum_{r=1}^{\infty}f(a+rh).$$

Diese Frage konnte bejaht werden; es läßt sich in der Tat eine Formel der genannten Art aufstellen, und zwar sind die Elemente derselben die von Berger zuerst systematisch behandelten verallgemeinerten Bernoullischen Zahlen. Wir können zu ihr auf einem doppelten Wege gelangen, je nachdem wir die Eulersche oder die von Krause abgeleitete, im Gebiete der ultrabernoullischen Zahlen geltende Summenformel zugrunde gelegt denken.

Diese neue Formel wird sich gleich dadurch von Bedeutung zeigen, daß sich mit ihrer Hilfe Rekursionsformeln für diese speziellen Bernoullischen Zahlen finden lassen, die sich den von Krause[13]) entwickelten anreihen; ihr Wert besteht aber vor allem darin, daß sie eine neue Möglichkeit für die Auswertung der Dirichletschen Reihen und damit für die Bestimmung der Klassenanzahl quadratischer Formen, sowie überhaupt für die angenäherte Berechnung anderer zahlentheoretischer Reihen darbietet.

Ehe wir jedoch in diese Untersuchungen über die Summenformel eintreten, soll gewissermaßen als Vorbereitung hierzu in einem besonderen Paragraphen der Zusammenhang festgestellt werden, der

zwischen den von Berger eingeführten und den ultrabernoullischen Zahlen und Funktionen besteht, deren Theorie ausführlich von Krause[14]) entwickelt worden ist.*)

§ 1.

Entwicklung der zu einer Fundamentaldiskriminante gehörenden Bernoullischen Zahlen und Funktionen aus den ultrabernoullischen Zahlen und Funktionen.

Unter einer Fundamentaldiskriminante im Sinne von Kronecker versteht man eine jede ganze Zahl Δ, die keine positive Quadratzahl ist und eine der drei Formen besitzt·

$$\Delta = P, \qquad P \equiv 1 \pmod 4,$$
$$\Delta = 4P, \qquad P \equiv -1 \pmod 4,$$
$$\Delta = 8P, \qquad P \equiv 1 \pmod 2,$$

vorausgesetzt, daß P in jedem Falle eine durch kein Quadrat außer 1 teilbare Zahl bedeutet.

Versteht man ferner unter $\left(\frac{\Delta}{r}\right)$ das Legendresche Symbol in seiner Verallgemeinerung von Kronecker, der den bekannten noch folgende Bedingung hinzugefügt hat:

$$\left(\frac{a}{2^\beta b}\right) = \left(\frac{2^\beta}{a}\right)\left(\frac{a}{b}\right), \qquad b \text{ ungerade},$$

und unter ε die positive oder negative Einheit, dergestalt, daß:

$$\varepsilon\Delta > 0,$$

so gelten die Formeln:

$$\text{I.} \qquad \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right) = 0,$$

$$\text{II.} \qquad \left(\frac{\Delta}{r+h\varepsilon\Delta}\right) = \left(\frac{\Delta}{r}\right) \qquad \text{für } r > 0,\ h > 0,$$

$$\text{III.} \qquad \left(\frac{\Delta}{\varepsilon\Delta - r}\right) = \varepsilon\left(\frac{\Delta}{r}\right) \qquad \text{für } 0 < r < \varepsilon\Delta,$$

$$\text{IV.} \qquad \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{2kr\pi i}{\varepsilon\Delta}} = \left(\frac{\Delta}{k}\right)(\sqrt{\Delta}) \qquad \text{für } k > 0,$$

wobei

$$(\sqrt{\Delta}) = \sqrt{\Delta} \qquad \text{für } \Delta > 0,$$
$$(\sqrt{\Delta}) = i\sqrt{-\Delta} \qquad \text{für } \Delta < 0;$$

$\sqrt{\Delta}$ und $\sqrt{-\Delta}$ bedeutet die absoluten Beträge von $\sqrt{\Delta}$ und $\sqrt{-\Delta}$.

Durch Zerlegung der Gleichung IV in ihren reellen und imaginären Bestandteil erhalten wir noch:

$$\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\cos\frac{2kr\pi}{\Delta} = \left(\frac{\Delta}{k}\right)\sqrt{\Delta} \qquad \text{für } \Delta > 0,$$

$$\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\sin\frac{2kr\pi}{-\Delta} = \left(\frac{\Delta}{k}\right)\sqrt{-\Delta} \qquad \text{für } \Delta < 0.$$

*) Die Theorie der ultrabernoullischen Zahlen ist auch noch von Césaro gegeben worden; die nötigen Angaben über die Literatur finden sich in der zitierten Arbeit von Krause.

Wir wählen bei unseren Betrachtungen zunächst $\Delta > 0$ und legen die von **Krause** eingeführte, als spezielle ultrabernoullische Zahl bezeichnete Größe zugrunde:

$$\sum_{2n}^{(u_r)} = \frac{1}{r^{2n}} + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(l\Delta + r)^{2n}} + \frac{1}{(l\Delta - r)^{2n}} \right\}, \qquad u_r = \frac{r\pi}{\Delta}.$$

Mit den ultrabernoullischen Zahlen $b_\mu(u_r)$, die durch die Gleichung definiert sind:

$$\omega(b+1)^\mu - b_\mu = 0,$$

steht dieselbe in folgendem Zusammenhang:

$$\sum_{2n}^{(u_r)} = -\left(\frac{\pi}{\Delta}\right)^{2n} \frac{(2i)^{2n}}{(2n-1)!} c\, b_{2n-1}, \qquad c = \frac{1}{\omega - 1}, \qquad \omega = e^{2iu_r}.$$

Lassen wir in dieser Größe r ein reduziertes Restsystem mod Δ durchlaufen, multiplizieren beide Seiten der Reihe nach entsprechend mit $\left(\frac{\Delta}{1}\right)$, $\left(\frac{\Delta}{2}\right)$, $\cdots$ $\left(\frac{\Delta}{\Delta - 1}\right)$ und addieren die entstehenden $\Delta - 1$ Gleichungen, so erhalten wir:

$$\sum_{r=1}^{\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \sum_{2n}^{(u_r)} = \sum_{r=1}^{\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l\Delta + r)^{2n}} + \sum_{r=1}^{\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(l\Delta - r)^{2n}}.$$

Da nun $\left(\frac{\Delta}{r}\right) = \left(\frac{\Delta}{l\Delta + r}\right) = \left(\frac{\Delta}{l\Delta - r}\right)$, so dürfen wir hierfür auch schreiben:

$$\sum_{r=1}^{\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \sum_{2n}^{(u_r)} = \sum_{r=1}^{\Delta-1} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{l\Delta + r}\right) \frac{1}{(l\Delta + r)^{2n}} + \sum_{r=1}^{\Delta-1} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{l\Delta - r}\right) \frac{1}{(l\Delta - r)^{2n}}.$$

Beachten wir, daß in den Doppelsummen der rechten Seite jeder der Ausdrücke $l\Delta + r$ und $l\Delta - r$ sämtliche zwischen 1 und ∞ gelegene Werte annimmt, so gewinnen wir die kürzere Darstellung:

$$\sum_{r=1}^{\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \sum_{2n}^{(u_r)} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{k^{2n}}.$$

Nun lautet aber nach **Berger** die Definitionsgleichung der zur Diskriminante Δ gehörenden Bernoullischen Zahl $B(2n, \Delta)$:

$$B(2n, \Delta) = \frac{2(-1)^{n-1}\sqrt{\Delta}}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{k^{2n}}.$$

Führen wir diese Größe in die obige Gleichung ein und ersetzen gleichzeitig die Reihe $\sum_{2n}^{(u_r)}$ durch den angegebenen Wert, so geht unsere Gleichung über in die folgende:

$$(1\text{a}) \qquad B(2n, \Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{(2n-1)!\, \Delta^{2n}} \sum_{r=1}^{\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) c\, b_{2n-1}, \qquad n \geq 1.$$

Setzen wir jetzt $\Delta < 0$ und wählen zur Untersuchung die ultrabernoullische Zahl $\sigma_{2n-1}^{(u_r)}$:

$$\sigma_{2n-1}^{(u_r)} = \frac{1}{r^{2n-1}} + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(-l\Delta + r)^{2n-1}} - \frac{1}{(-l\Delta - r)^{2n-1}} \right\}, \qquad u_r = \frac{r\pi}{-\Delta}.$$

Wir verfahren genau wie vorhin, setzen $r = 1, 2, \cdots -\Delta - 1$, multiplizieren mit dem entsprechenden Symbol $\left(\frac{\Delta}{r}\right)$, addieren sämtliche linken und rechten Seiten der Gleichungen und erhalten:

$$\sum_{r=1}^{-\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \sigma_{2n-1}^{(u_r)} = \sum_{r=1}^{-\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(-l\Delta + r)^{2n-1}} - \sum_{r=1}^{-\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(-l\Delta - r)^{2n-1}}.$$

Substituieren wir für $\left(\frac{\Delta}{r}\right)$ unter Anwendung von II und III in der ersten Summe der rechten Seite $\left(\frac{\Delta}{-l\Delta+r}\right)$ und in der zweiten $-\left(\frac{\Delta}{-l\Delta-r}\right)$, so erhalten wir die der früheren analoge Gleichung:

$$\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\sigma_{2n-1}^{(u_r)} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{1}{k^{2n-1}}.$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen:

$$B(2n-1, \Delta) = \frac{2(-1)^n\sqrt{-\Delta}}{(2\pi)^{2n-1}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{1}{k^{2n-1}},$$

$$\sigma_{2n-1}^{(u_r)} = \frac{(-1)^{n-1}i(2\pi)^{2n-1}}{(2n-2)!\,(-\Delta)^{2n-1}}\,c\,b_{2n-2},$$

wobei $B(2n-1, \Delta)$ die zur Diskriminante $-\Delta$ gehörende Bernoullische Zahl ist und c und b_{2n-2} den bekannten Bedingungen genügen, nimmt die Gleichung die Form an:

$$\text{(1b)}\qquad B(2n-1, \Delta) = -\frac{i\sqrt{-\Delta}}{(2n-2)!\,(-\Delta)^{2n-1}}\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)c\,b_{2n-2}, \qquad n \geqq 2.$$

Für den Fall $n=1$ ist die Untersuchung besonders zu führen. Wir benützen die Beziehung:

$$\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)c\,b_{2n} = \frac{i(2n)!\,(-\Delta)^{2n+1}}{\sqrt{-\Delta}}\,B(2n+1, \Delta) = \sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{d^{2n}}{dy^{2n}}\left(\frac{1}{e^{y+v}-1}\right)_{y=0}$$

und leiten daraus ab für $n=0$, $v=2iu_r$:

$$\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)c = \frac{i(-\Delta)}{\sqrt{-\Delta}}\,B(1, \Delta) = \sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{1}{e^v-1},$$

oder

$$\text{(1c)}\qquad B(1, \Delta) = -\frac{i\sqrt{-\Delta}}{-\Delta}\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)c.$$

Durch Zusammenfassung der Formeln (1a) und (1b) erhalten wir noch das Resultat:

$$B(m, \Delta) = (-1)^m\frac{\{1+\varepsilon(-1)^m\}(\sqrt{\Delta})}{2(m-1)!\,(\varepsilon\Delta)^m}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)c\,b_{m-1}(u_r), \qquad m \geqq 2.$$

Es ergibt sich also der **Satz:**

Die Zahlen $B(m, \Delta)$ leisten für $m \geqq 2$ der Gleichung Genüge:

$$B(m, \Delta) = (-1)^m\frac{\{1+\varepsilon(-1)^m\}(\sqrt{\Delta})}{2(m-1)!\,(\varepsilon\Delta)^m}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)c\,b_{m-1}(u_r), \qquad u_r = \frac{r\pi}{\varepsilon\Delta};$$

für $\Delta > 0$ gilt die Formel auch noch für $m=1$, für $\Delta < 0$ tritt für $m=1$ an ihre Stelle die folgende:

$$B(1, \Delta) = -\frac{i\sqrt{-\Delta}}{-\Delta}\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)c.$$

Nehmen wir jetzt wiederum $\Delta > 0$ und denken uns nach dem Vorgange von Krause[14]) eine in eine Fouriersche Reihe entwickelte Funktion $f(y)$ vorgelegt:

$$f(y) = \frac{\cos ry}{r^2} + \sum_{l=1}^{\infty}\left\{\frac{\cos(l\Delta+r)y}{(l\Delta+r)^2} + \frac{\cos(l\Delta-r)y}{(l\Delta-r)^2}\right\}.$$

2

Diese Kosinusreihe stellt für alle Werte von Δ im Intervalle $0 \leqq y \leqq \pi$ eine Funktion dar, die in den Teilintervallen:

$$0 - \frac{2\pi}{\Delta},\ \frac{2\pi}{\Delta} - \frac{4\pi}{\Delta},\ \dots\ \frac{2p-2}{\Delta}\pi - \frac{2p\pi}{\Delta},\ \dots\ \frac{\Delta-2}{\Delta}\pi - \pi$$

die resp. Formen hat:
$$\frac{2\pi}{\Delta}(f_2 \cdot y + g_2),\quad \frac{2\pi}{\Delta}(f_4 \cdot y + g_4),\ \dots\ \frac{2\pi}{\Delta}(f_\Delta \cdot y + g_\Delta),$$

wobei die Konstanten f und g die Werte besitzen:

$$f_{2p} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2p-1)u_r}{\sin u_r},$$

$$g_{2p} = \frac{\pi}{2\Delta} \cdot \frac{\cos 2pu_r + 2p\sin(2p-1)u_r \cdot \sin u_r}{\sin^2 u_r}, \qquad u_r = \frac{r\pi}{\Delta}.$$

Lassen wir auch hier r ein reduziertes Restsystem mod Δ durchlaufen, multiplizieren jede der entstehenden $\Delta - 1$ Gleichungen mit dem entsprechenden Symbol $\left(\frac{\Delta}{r}\right)$ und addieren schließlich sämtliche linken und rechten Seiten, so erhalten wir die neue Gleichung:

$$\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right) f(y) = \sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\cos(l\Delta+r)y}{(l\Delta+r)^2} + \sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\cos(l\Delta-r)y}{(l\Delta-r)^2}.$$

Ersetzen wir noch y durch $2\pi z$ und multiplizieren das Ganze mit $\frac{\sqrt{\Delta}}{(2\pi)^2}$, so haben wir auf diesem Wege aus $f(y)$ eine neue Funktion $F(z)$ gewonnen:

$$F(z) = \frac{2\sqrt{\Delta}}{(2\pi)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\cos 2k\pi z}{k^2},$$

welche in den Teilintervallen:

$$0 - \frac{1}{\Delta},\ \frac{1}{\Delta} - \frac{2}{\Delta},\ \dots\ \frac{p-1}{\Delta} - \frac{p}{\Delta},\ \dots\ \frac{\Delta-2}{2\Delta} - \frac{1}{2}$$

die resp. Formen besitzt:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi\Delta}(F_1 \cdot 2\pi z + G_1),\quad \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi\Delta}(F_2 \cdot 2\pi z + G_2),\ \dots\ \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi\Delta}(F_p \cdot 2\pi z + G_p),\ \dots$$

Dabei sind die Größen F_p und G_p aus den Größen f_{2p} und g_{2p} auf dieselbe Weise entstanden wie $F(z)$ aus $f(y)$, sind also durch die Gleichungen definiert:

$$F_p = -\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{\sin(2p-1)u_r}{2\sin u_r},$$

$$G_p = \frac{\pi}{2\Delta}\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{\cos 2pu_r + 2p\sin(2p-1)u_r \cdot \sin u_r}{\sin^2 u_r}.$$

Diese trigonometrischen Summen lassen sich durch einfachere ersetzen. Es gilt die bekannte Formel:

$$\frac{\sin(2p-1)u_r}{2\sin u_r} = \frac{1}{2} + \cos 2u_r + \cos 4u_r + \cdots + \cos 2(p-1)u_r.$$

Da nun:
$$\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\cos 2ku_r = \left(\frac{\Delta}{k}\right)\sqrt{\Delta} \quad \text{und} \quad \sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\cdot \text{const} = 0,$$

so folgt sofort das Resultat:
$$F_p = -\sqrt{\Delta}\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{k}\right).$$

Für $p=1$ wird $k=0$, die Kosinusreihe reduziert sich auf das konstante Glied. Dehnen wir also die Formel auch auf das erste Teilintervall aus, so dürfen wir schreiben, da $\left(\frac{\Delta}{0}\right)=0$:

$$F_p = -\sqrt{\Delta}\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{k}\right).$$

Für G_p schreiben wir ferner, indem wir zerlegen:

$$G_p = \frac{\pi}{2\Delta}\left\{\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{\cos 2pu_r}{\sin^2 u_r} + 4p\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{\sin(2p-1)u_r}{2\sin u_r}\right\}.$$

Jetzt können wir diese Summen einzeln betrachten und gewinnen zunächst aus der bekannten Formel:

$$\frac{1-\cos 2pu_r}{2\sin u_r} = \sin u_r + \sin 3u_r + \sin 5u_r + \cdots + \sin(2p-1)u_r$$

durch Division die folgende:

$$\frac{1-\cos 2pu_r}{2\sin^2 u_r} = 1 + \frac{\sin 3u_r}{\sin u_r} + \frac{\sin 5u_r}{\sin u_r} + \cdots + \frac{\sin(2p-1)u_r}{\sin u_r}.$$

Diese erlaubt uns sofort, den ersten trigonometrischen Teil von G_p in eine für unsere Zwecke geeignete Form zu bringen:

$$\frac{\cos 2pu_r}{\sin^2 u_r} = \frac{1}{\sin^2 u_r} - 4\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cos 2u_r + \frac{1}{2} + \cos 2u_r + \cos 4u_r + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} + \cos 2u_r + \cos 4u_r + \cdots + \cos 2(p-1)u_r\right]$$

$$\frac{\cos 2pu_r}{\sin^2 u_r} = \frac{1}{\sin^2 u_r} - 4\left[\frac{p}{2} + (p-1)\cos 2u_r + (p-2)\cos 4u_r + \cdots + \cos 2(p-1)u_r\right].$$

Somit ergibt sich:

$$\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{\cos 2pu_r}{\sin^2 u_r} = \sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{1}{\sin^2 u_r} - 4\sqrt{\Delta}\sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)(p-r).$$

Zur Berechnung von $\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{1}{\sin^2 u_r}$ benutzen wir die bereits erwähnten Beziehungen:

$$\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right) c\, b_{2n-1} = \sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{d^{2n-1}}{dy^{2n-1}}\left(\frac{1}{e^{y+v}-1}\right)_{y=0} = \frac{(2n-1)!\,\Delta^{2n}}{\sqrt{\Delta}} B(2n,\Delta).$$

Diese Gleichungen liefern für $n=1$:

$$\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{e^{y+v}-1}\right)_{y=0} = \Delta\sqrt{\Delta}\,B(2,\Delta)$$

$$-\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{e^v}{(e^v-1)^2} = -\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{1}{e^v-2+e^{-v}} = \Delta\sqrt{\Delta}\,B(2,\Delta).$$

Für $v=2iu_r$ folgt hieraus weiter:

$$\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{1}{2(1-\cos 2u_r)} = \sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{1}{4\sin^2 u_r} = \Delta\sqrt{\Delta}\,B(2,\Delta).$$

Wir erhalten demnach:

$$\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{1}{\sin^2 u_r} = 4\Delta\sqrt{\Delta}\,B(2,\Delta).$$

Der andere Teil von G_p enthält dieselbe trigonometrische Summe wie F_p, G_p nimmt also schließlich folgende Gestalt an:

$$G_p = \frac{\pi}{2\Delta}\left[4\Delta\sqrt{\Delta}\,B(2,\Delta) - 4p\sqrt{\Delta}\sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right) + 4\sqrt{\Delta}\sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\cdot r + 4p\sqrt{\Delta}\sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\right]$$

$$G_p = 2\pi\sqrt{\Delta}\left[B(2,\Delta) + \frac{1}{\Delta}\sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\cdot r\right].$$

Wir kehren nunmehr zu unserer trigonometrischen Reihe $F(z)$ zurück. Dieselbe sollte in dem Teilintervall von $\frac{p-1}{\Delta}$ bis $\frac{p}{\Delta}$, $p < \Delta$, die Form besitzen:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi\Delta}(F_p\cdot 2\pi z + G_p).$$

Durch Einsetzen der für die Konstanten F_p und G_p ermittelten Werte erhalten wir:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi\Delta}\left[-2\pi\sqrt{\Delta}\cdot z\sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right) + 2\pi\sqrt{\Delta}\,B(2,\Delta) + \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{\Delta}\sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r\right] = B(2,\Delta) - \sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left\{z - \frac{r}{\Delta}\right\}.$$

Wir gewinnen also den **Satz:**

Die trigonometrische Reihe $F(z)$ stellt im Intervall $0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}$ eine Schar gerader Linien dar; sie kann für jedes Teilintervall von $z = \frac{p-1}{\Delta}$ bis $\frac{p}{\Delta}$, $p < \Delta$, in die Form gebracht werden:

$$\frac{2\sqrt{\Delta}}{(2\pi)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\cos 2k\pi z}{k^2} = B(2,\Delta) - \sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left\{z - \frac{r}{\Delta}\right\}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $1 - z$ an Stelle von z, also daß $0 \leqq 1 - z \leqq \frac{1}{2}$, während z nunmehr den Ungleichungen genügen muß $1 \geqq z \geqq \frac{1}{2}$, so geht die linke Seite in sich selbst über. Die Funktionswerte bleiben demnach dieselben, nur werden sie gerade in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen, wenn wir dem Linienzuge in der ursprünglichen Richtung von $z = \frac{1}{2}$ bis $z = 1$ weiter folgen, so daß die Gerade $z = \frac{1}{2}$ als Symmetrielinie für beide Kurvenhälften aufgefaßt werden kann. Da überdies die Funktion $F(z)$ auch dann in sich selbst übergeht, so oft man z um beliebige ganze Zahlen vermehrt, so kann die Gültigkeit des Satzes auf alle reellen Werte $z \geqq 0$ ausgedehnt werden, und zwar wird das Bild der Funktion in jedem, von zwei benachbarten ganzen Zahlen begrenzten Intervall stets dasselbe sein.

Anmerkung: Nach Berger ist:

$$B(2,\Delta) = \frac{1}{2\Delta^2}\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r^2.$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung für $\frac{1}{\sin^2 u_r}$ ein, so erhalten wir die bereits seit längerer Zeit durch Lerch[9]) bekannte Formel:

$$\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{1}{\sin^2\frac{r\pi}{\Delta}} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r^2.$$

Machen wir noch Gebrauch von den Bergerschen Formeln:

$$B(2n-1, \Delta) = 0 \qquad \text{für } \Delta > 0,\ n \geqq 1,$$

$$\varphi(z, 0, \Delta) = 0,$$

$$\varphi(z, m, \Delta) = \sum_{k=1}^{m} \frac{B(m-k, \Delta)}{k!} z^k \qquad \text{für } m \geqq 1,$$

und schreiben unser Resultat in der Form:

$$-\frac{2\sqrt{\Delta}}{(2\pi i)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\cos 2k\pi z}{k^2} = B(2, \Delta) - \sum_{r=0}^{p-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left(z - \frac{r}{\Delta}\right),$$

so können wir aus ihm weitere Gleichungen durch Integration finden, die dann Scharen von Kurven höherer Ordnung darstellen werden. Wir bedürfen dazu noch der Gleichung:

$$\varphi'(z, m+1, \Delta) = \varphi(z, m, \Delta) + B(m, \Delta),$$

der wir folgende Gestalt geben:

$$\int_0^z \varphi(z, m, \Delta)\, dz = \varphi(z, m+1, \Delta) - B(m, \Delta) z.$$

Wir erhalten der Reihe nach:

$$-\frac{2i\sqrt{\Delta}}{(2\pi i)^3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\sin 2k\pi z}{k^3} = \varphi(z, 3, \Delta) - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{p-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left(z - \frac{r}{\Delta}\right)^2$$

$$\frac{2\sqrt{\Delta}}{(2\pi i)^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\cos 2k\pi z}{k^4} = -\varphi(z, 4, \Delta) - B(4, \Delta) + \frac{1}{3!} \sum_{r=0}^{p-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left(z - \frac{r}{\Delta}\right)^3$$

oder schließlich allgemein:

$$\frac{2i\sqrt{\Delta}}{(2\pi i)^{2n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2n-1}} = -\varphi(z, 2n-1, \Delta) + \frac{1}{\Gamma(2n-1)} \sum_{r=0}^{p-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left(z - \frac{r}{\Delta}\right)^{2n-2},$$

$$\frac{2\sqrt{\Delta}}{(2\pi i)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2n}} = -B(2n, \Delta) - \varphi(z, 2n, \Delta) + \frac{1}{\Gamma(2n)} \sum_{r=0}^{p-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left(z - \frac{r}{\Delta}\right)^{2n-1}.$$

Fügen wir die Annahme hinzu, daß $p = E(\Delta z)$, also gleich der größten ganzen Zahl kleiner als Δz ist, so dürfen wir die Summation auf der rechten Seite bis p erstrecken, da das letzte Glied für $z = \frac{p}{\Delta}$ dann von selbst verschwindet. Fassen wir endlich noch die beiden letzten Gleichungen zu einer einzigen zusammen, so erhalten wir das Resultat:

$$\text{(2a)} \quad \frac{\sqrt{\Delta}}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{e^{2k\pi z i} + (-1)^m e^{-2k\pi z i}}{k^m} = -B(m, \Delta) - \varphi(z, m, \Delta) + \frac{1}{\Gamma(m)} \sum_{r=0}^{p} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left(z - \frac{r}{\Delta}\right)^{m-1}.$$

Für den nun folgenden Fall einer negativen Diskriminante $\Delta < 0$ denken wir uns ebenfalls eine in eine Fouriersche Reihe entwickelte Funktion $f(y)$ vorgelegt:

$$f(y) = \frac{\sin ry}{r^2} + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(-l\Delta + r) y}{(-l\Delta + r)^2} - \frac{\sin(-l\Delta - r) y}{(-l\Delta - r)^2} \right\}.$$

Diese Sinusreihe stellt im Intervalle $0 \leqq y \leqq \pi$ eine Funktion dar, die in den Teilintervallen:

$$0 - \frac{2\pi}{-\Delta},\ \frac{2\pi}{-\Delta} - \frac{4\pi}{-\Delta},\ \ldots \frac{-\Delta - 2}{\Delta}\pi - \pi$$

die resp. Formen hat:

$$\frac{2\pi}{-\Delta}(f_2 \cdot y + g_2), \quad \frac{2\pi}{-\Delta}(f_4 \cdot y + g_4), \quad \cdots \quad \frac{2\pi}{-\Delta}(f_{-\Delta} \cdot y + g_{-\Delta}),$$

wobei die Konstanten f und g die Werte besitzen:

$$f_{2p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(2p-1)u_r}{\sin u_r},$$

$$g_{2p} = \frac{\pi}{-2\Delta} \cdot \frac{\sin 2pu_r - 2p\cos(2p-1)u_r \cdot \sin u_r}{\sin^2 u_r}.$$

Wenden wir auch auf diese vorgelegte Reihe das bekannte Verfahren an, so erhalten wir dadurch die Gleichung:

$$\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right) f(y) = \sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\sin(-l\Delta+r)y}{(-l\Delta+r)^2} - \sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin(-l\Delta-r)y}{(-l\Delta-r)^2}.$$

Multiplizieren wir dieselbe mit $\frac{\sqrt{-\Delta}}{(2\pi)^2}$ und ersetzen y durch $2\pi z$, so gelangen wir zur folgenden Funktion:

$$F(z) = \frac{2\sqrt{-\Delta}}{(2\pi)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\sin 2k\pi z}{k^2}.$$

Diese Reihe $F(z)$ stellt im Intervalle $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$ eine Funktion dar, die in jedem Teilintervall von der Form $\frac{p-1}{-\Delta}$ bis $\frac{p}{-\Delta}$, $p < -\Delta$, die Gestalt hat:

$$\frac{\sqrt{-\Delta}}{-2\pi\Delta}(F_p \cdot 2\pi z + G_p).$$

Dabei ergeben sich ganz analog dem vorigen Beispiel für die Größen F_p und G_p die Ausdrücke:

$$F_p = \sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{\cos(2p-1)u_r}{2\sin u_r},$$

$$G_p = \sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{\pi}{-2\Delta} \cdot \frac{\sin 2pu_r - 2p\cos(2p-1)u_r \sin u_r}{\sin^2 u_r}.$$

Zur Umformung dieser Größen bilden wir:

$$\frac{\cos(2p-1)u_r}{2\sin u_r} = \frac{1}{2}\operatorname{cotg} u_r - [\sin 2u_r + \sin 4u_r + \cdots + \sin 2(p-1)u_r],$$

und da

$$\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\sin 2ku_r = \left(\frac{\Delta}{r}\right)\sqrt{-\Delta},$$

so wird

$$F_p = \sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{1}{2}\operatorname{cotg} u_r - \sqrt{-\Delta}\sum_{r=1}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right).$$

Da ferner nach einer von Krause angegebenen Beziehung:

$$\frac{1}{2}\operatorname{cotg} u_r = i\left(\frac{1}{2} + c\right),$$

so erhalten wir für den noch übrigen trigonometrischen Teil von F_p:

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\operatorname{cotg} u_r = i\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)c = -\sqrt{-\Delta}\,B(1,\Delta).$$

Mithin nimmt F_p die Form an, die zugleich mit für das erste Teilintervall gilt:

$$F_p = -\sqrt{-\Delta}\left[B(1,\Delta) + \sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\right].$$

Weiterhin betrachten wir zur Vereinfachung von G_p die Entwicklung:

$$\frac{\sin 2pu_r}{2\sin u_r} = \cos u_r + \cos 3u_r + \cos 5u_r + \cdots + \cos(2p-1)u_r,$$

aus welcher wir gleich weiter folgern:

$$\frac{\sin 2pu_r}{\sin^2 u_r} = 4\left[\frac{1}{2}\operatorname{cotg} u_r + \frac{\cos 3u_r}{2\sin u_r} + \frac{\cos 5u_r}{2\sin u_r} + \cdots + \frac{\cos(2p-1)u_r}{2\sin u_r}\right]$$

$$= 4\left[\frac{1}{2}\operatorname{cotg} u_r + \frac{1}{2}\operatorname{cotg} u_r - \sin 2u_r + \frac{1}{2}\operatorname{cotg} u_r - \sin 2u_r - \sin 4u_r + \cdots\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{2}\operatorname{cotg} u_r - \sin 2u_r - \sin 4u_r - \cdots - \sin 2(p-1)u_r\right]$$

$$\frac{\sin 2pu_r}{\sin^2 u_r} = 4p\cdot\frac{1}{2}\operatorname{cotg} u_r - 4\Big[(p-1)\sin 2u_r + (p-2)\sin 4u_r + \cdots + \sin 2(p-1)u_r\Big].$$

Unter Anwendung der bekannten Formeln können wir nunmehr die Gleichung ableiten:

$$\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{\sin 2pu_r}{\sin^2 u_r} = -4\sqrt{-\Delta}\left[p\cdot B(1,\Delta) + \sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)(p-r)\right].$$

Für G_p selbst folgt dann ohne weitere Schwierigkeit:

$$G_p = \frac{\pi}{-2\Delta}\Bigg[\quad 4p\sqrt{-\Delta}\,B(1,\Delta) - 4p\sqrt{-\Delta}\sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right) + 4\sqrt{-\Delta}\sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\cdot r$$

$$+ 4p\sqrt{-\Delta}\,B(1,\Delta) + 4p\sqrt{-\Delta}\sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\Bigg].$$

$$G_p = \frac{2\pi\sqrt{-\Delta}}{-\Delta}\sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\cdot r.$$

Wenden wir uns nunmehr wieder zu unserer trigonometrischen Reihe $F(z)$ zurück! Dieselbe sollte im Teilintervalle von $\frac{p-1}{-\Delta}$ bis $\frac{p}{-\Delta}$, $p < -\Delta$, die Form besitzen:

$$\frac{\sqrt{-\Delta}}{-2\pi\Delta}(F_p\cdot 2\pi z + G_p).$$

Durch Einsetzen der gefundenen Werte für die Konstanten erhalten wir jetzt:

$$\frac{\sqrt{-\Delta}}{-2\pi\Delta}\left[-2\pi z\sqrt{-\Delta}B(1,\Delta) - 2\pi z\sqrt{-\Delta}\sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right) + \frac{2\pi\sqrt{-\Delta}}{-\Delta}\sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\cdot r\right] = -B(1,\Delta)z - \sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(z - \frac{r}{-\Delta}\right).$$

Wir finden damit den **Satz:**

Die trigonometrische Reihe $F(z)$ stellt im Intervall $0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}$ eine Schar gerader Linien dar; sie kann für jedes Teilintervall $z = \frac{p-1}{-\Delta}$ bis $z = \frac{p}{-\Delta}$ in die Form gebracht werden:

$$\frac{2\sqrt{-\Delta}}{(2\pi)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\sin 2k\pi z}{k^2} = -B(1,\Delta)\cdot z - \sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(z - \frac{r}{-\Delta}\right).$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung kann ebenfalls auf alle reellen Werte $z \geqq 0$ ausgedehnt werden, denn setzen wir statt z überall $1 - z$, so daß dann z den Ungleichungen genügt $1 \geqq z \geqq \frac{1}{2}$, so nimmt die Funktion genau dieselben Werte, nur mit umgekehrtem Vorzeichen an, während sie bei Vermehrung des Argumentes um ganze Zahlen stets wieder in sich selbst übergeht.

Auch hier können analog wie bei $\Delta > 0$ aus der aufgestellten weitere Gleichungen durch Integration hergeleitet werden. Beachten wir nur, daß:

$$B(2n, \Delta) = 0 \quad \text{für } \Delta < 0,$$

und schreiben unsere Gleichung in der Form:

$$\frac{2\sqrt{-\Delta}}{(2\pi i)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\sin 2k\pi z}{k^2} = \varphi(z, 2, \Delta) + \sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(z - \frac{r}{-\Delta}\right),$$

so folgen hieraus der Reihe nach die Gleichungen:

$$-\frac{2i\sqrt{-\Delta}}{(2\pi i)^3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\cos 2k\pi z}{k^3} = \varphi(z, 3, \Delta) + B(3, \Delta) + \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(z - \frac{r}{-\Delta}\right)^2$$

$$\frac{2\sqrt{-\Delta}}{(2\pi i)^4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\sin 2k\pi z}{k^4} = \varphi(z, 4, \Delta) + \frac{1}{3!}\sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(z - \frac{r}{-\Delta}\right)^3$$

oder allgemein:

$$\frac{2i\sqrt{-\Delta}}{(2\pi i)^{2n-1}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\cos 2k\pi z}{k^{2n-1}} = -\varphi(z, 2n-1, \Delta) - B(2n-1, \Delta) - \frac{1}{\Gamma(2n-1)}\sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(z - \frac{r}{-\Delta}\right)^{2n-2}$$

$$\frac{2\sqrt{-\Delta}}{(2\pi i)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\sin 2k\pi z}{k^{2n}} = \varphi(z, 2n, \Delta) + \frac{1}{\Gamma(2n)}\sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(z - \frac{r}{-\Delta}\right)^{2n-1}.$$

Beachten wir ferner, daß:

$$(\sqrt{\Delta}) = i\sqrt{-\Delta},$$

also

$$\sqrt{-\Delta} = -i(\sqrt{\Delta}),$$

so lassen sich auch diese beiden Gleichungen zu der folgenden zusammenfassen:

$$(2\text{b}) \quad \frac{(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{e^{2k\pi z i} - (-1)^m e^{-2k\pi z i}}{k^m} = -B(m, \Delta) - \varphi(z, m, \Delta) - \frac{1}{\Gamma(m)}\sum_{r=0}^{p-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(z - \frac{r}{-\Delta}\right)^{m-1}.$$

Durch Zusammenfassung von Gleichung (2a) und (2b) erhalten wir schließlich das Endresultat:

$$\frac{(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{e^{2k\pi z i} + \varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi z i}}{k^m} = -B(m, \Delta) - \varphi(z, m, \Delta) + \frac{\varepsilon}{\Gamma(m)}\sum_{r=0}^{s}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(z - \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)^{m-1}$$

$$\text{für } z \geqq 0, \quad m \geqq 2, \quad s = E(\varepsilon\Delta z).$$

Diese Gleichung ist dieselbe, die auch Berger am Schlusse seiner Betrachtungen gewonnen hat.

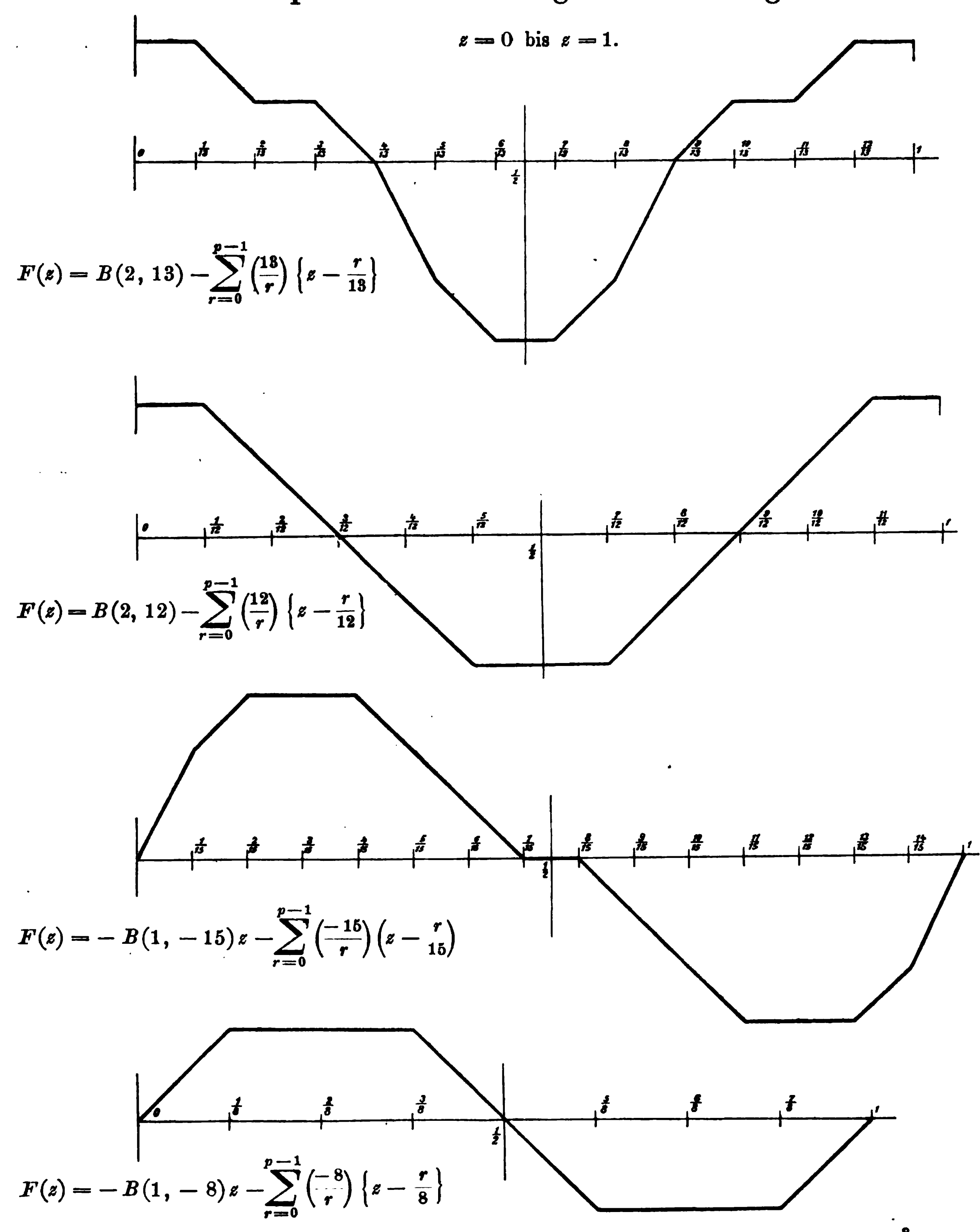
Anmerkung: Setzen wir in der Gleichung für $\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\cot u_r$ nach Berger:

$$B(1, \Delta) = -\frac{\sqrt{-\Delta}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{1}{k^n},$$

so erhalten wir folgende Formel, die ebenfalls bereits von Lerch[9]) aufgestellt worden ist:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{1}{k} = \frac{\pi}{-2\Delta}\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\cot\frac{r\pi}{-\Delta}.$$

Graphische Darstellung der Linienzüge.



Richten wir jetzt unser Augenmerk nochmals auf den Ausgangspunkt der letzten Betrachtungen, auf die gegebenen trigonometrischen Funktionen $f(y)$. Beide stellen nach Krause[14]) ultrabernoullische Funktionen dar, und zwar die Kosinusreihe die Funktion $\sum\limits_{2}^{(u_r)}$, die Sinusreihe die Funktion $\sigma_2^{(u_r)}$. Ganz entsprechend bedeuten dann auch die aus ihnen abgeleiteten Reihen ultrabernoullische Funktionen, nur von höherer Ordnungszahl, nämlich die Funktionen $\sum\limits_{2n-1}^{(u_r)}$ und $\sum\limits_{2n}^{(u_r)}$ für $\varDelta > 0$ und $\sigma_{2n-1}^{(u_r)}$ und $\sigma_{2n}^{(u_r)}$ für $\varDelta < 0$. Die zitierte Arbeit von Krause enthält auch die Beziehungen, welche zwischen diesen Größen und den allgemeinen ultrabernoullischen Funktionen $B_m(y, u_r)$ im Intervalle $0 \leq y \leq \frac{2\pi}{\varepsilon \varDelta}$ existieren, und auf Grund der angegebenen Resultate soll jetzt noch der Zusammenhang zwischen den Funktionen $B_m(y, u_r)$ und $\varphi(z, m, \varDelta)$ für dieselben Werte von y, also für $0 \leq z \leq \frac{1}{\varepsilon \varDelta}$ hergestellt werden.

Die Funktion $B_m(y, u_r)$ läßt sich in zwei Teile spalten:

$$2\, B_m(y, u_r) = B'_m(y, u_r) + B''_m(y, u_r),$$

von denen $B'_m(y, u_r)$ rein imaginär, $B''_m(y, u_r)$ reell ist. Nur mit diesen Teilausdrücken wollen wir uns weiterhin beschäftigen und nacheinander die vorkommenden Fälle betrachten. Vorausgeschickt sei noch die Bemerkung, daß für die angegebenen Werte von z, die alle innerhalb des ersten Teilintervalles gelegen sind, die nach p zu nehmenden Summen auf den rechten Seiten der Gleichungen sämtlich verschwinden müssen.

Wir gehen für $\varDelta > 0$ von der Gleichung aus:

$$\varphi(z, 2n-1, \varDelta) = (-1)^n \frac{2\sqrt{\varDelta}}{(2\pi)^{2n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varDelta}{k}\right) \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2n-1}}, \qquad n \geq 2.$$

Indem wir dieselbe mit der folgenden verbinden:

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varDelta}{k}\right) \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n-1}}{2\,(2n-2)!\, \varDelta^{2n-1}} \sum_{r=1}^{\varDelta-1} \left(\frac{\varDelta}{r}\right) B''_{2n-2}(\varDelta z, u_r),$$

erhalten wir sofort das gewünschte Resultat:

$$\varphi(z, 2n-1, \varDelta) = -\frac{\sqrt{\varDelta}}{2\,(2n-2)!\, \varDelta^{2n-1}} \sum_{r=1}^{\varDelta-1} \left(\frac{\varDelta}{r}\right) B''_{2n-2}(\varDelta z, u_r).$$

Weiterhin denken wir uns die beiden Gleichungen vorgelegt:

$$\varphi(z, 2n, \varDelta) + B(2n, \varDelta) = (-1)^{n-1} \frac{2\sqrt{\varDelta}}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varDelta}{k}\right) \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2n}} \qquad n \geq 1,$$

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varDelta}{k}\right) \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2n}} = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2 \cdot (2n-1)!\, \varDelta^{2n}} \sum_{r=1}^{\varDelta-1} \left(\frac{\varDelta}{r}\right) B'_{2n-1}(\varDelta z, u_r),$$

welche zu der folgenden Beziehung führen:

$$\varphi(z, 2n, \varDelta) + B(2n, \varDelta) = \frac{\sqrt{\varDelta}}{2 \cdot (2n-1)!\, \varDelta^{2n}} \sum_{r=1}^{\varDelta-1} \left(\frac{\varDelta}{r}\right) B''_{2n-1}(\varDelta z, u_r).$$

Ganz analog verfahren wir nun auch für den Fall $\varDelta < 0$, indem wir zunächst von den Gleichungen ausgehen:

$$\varphi(z, 2n-1, \varDelta) + B(2n-1, \varDelta) = (-1)^n \frac{2 \cdot \sqrt{-\varDelta}}{(2\pi)^{2n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varDelta}{k}\right) \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2n-1}}, \qquad n \geq 2,$$

$$2\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\cos 2k\pi z}{k^{2n-1}} = (-1)^{n-1}\frac{i(2\pi)^{2n-1}}{2(2n-2)!(-\Delta)^{2n-1}}\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)B'_{2n-2}(-\Delta z, u_r)$$

und aus ihnen das Resultat ableiten:

$$\varphi(z, 2n-1, \Delta) + B(2n-1, \Delta) = -\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2(2n-2)!(-\Delta)^{2n-1}}\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)B'_{2n-2}(-\Delta z, u_r).$$

Schließlich betrachten wir auch noch die folgenden Gleichungen:

$$\varphi(z, 2n, \Delta) = (-1)^n\frac{2\sqrt{-\Delta}}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\sin 2k\pi z}{k^{2n}}, \qquad n \geq 1,$$

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\sin 2k\pi z}{k^{2n}} = (-1)^{n-1}\frac{i(2\pi)^{2n}}{2(2n-1)!(-\Delta)^{2n}}\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)B'_{2n-1}(-\Delta z, u_r).$$

Durch Einsetzen erhalten wir hier:

$$\varphi(z, 2n, \Delta) = -\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2(2n-1)!(-\Delta)^{2n}}\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)B'_{2n-1}(-\Delta z, u_r).$$

Fassen wir zum Schlusse noch die Ergebnisse für $\Delta \gtrless 0$ zu je einer Formel zusammen, so kommen wir zu dem **Satze:**

Die Funktionen $\varphi(z, m, \Delta)$ hängen mit den ultrabernoullischen Funktionen durch folgende Gleichungen zusammen:

$$\varphi(z, m, \Delta) + B(m, \Delta) = (-1)^m\frac{\sqrt{\Delta}}{2(m-1)!\,\Delta^m}\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)B''_{m-1}(\Delta z, u_r), \qquad \Delta > 0,\ 0 \leq z \leq \frac{1}{\Delta};$$

$$\varphi(z, m, \Delta) + B(m, \Delta) = -\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2(m-1)!(-\Delta)^m}\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)B'_{m-1}(-\Delta z, u_r), \qquad \Delta < 0,\ 0 \leq z \leq \frac{1}{-\Delta}.$$

Es sei noch bemerkt, daß man, ohne die trigonometrischen Reihen zu benützen, zu denselben Beziehungen gelangen kann, wenn man von den Definitionsgleichungen der Funktionen B'_m und B''_m ausgeht und sie dem im vorliegenden Paragraphen wiederholt angewandten Verfahren unterwirft.

§ 2.

Ableitung einer Summenformel zur Berechnung von Ausdrücken von der Form:

$$\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\Delta}{r}\right)f(a+rh).$$

Es sei die bekannte Euler-Maclaurinsche Summenformel zugrunde gelegt:

$$h\{f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+(l-1)h)\}$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \frac{h}{2}\{f(b) - f(a)\} + B_1\frac{h^2}{2!}\{f'(b) - f'(a)\} - B_2\frac{h^4}{4!}\{f'''(b) - f'''(a)\} \pm \cdots$$

$$+ (-1)^n B_{n-1}\frac{h^{2n-2}}{(2n-2)!}\{f^{(2n-3)}(b) - f^{(2n-3)}(a)\} - \frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1\varphi(1-t, 2n)\sum_{\varrho=0}^{l-1}f^{(2n)}(a+\varrho h+ht)\,dt$$

$$b = a + lh.$$

Wir wollen zunächst in der vorgelegten Summe $\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\Delta}{r}\right)f(a+rh)$ alle diejenigen Werte $\left(\frac{\Delta}{r}\right)f(a+rh)$ für sich zusammenfassen, in denen r zu derselben Restklasse (mod Δ) gehört. Unter Benützung der bekannten Beziehung:

$$\left(\frac{\Delta}{\varepsilon\Delta+r}\right)=\left(\frac{\Delta}{r}\right)$$

sind wir dann berechtigt, die sämtlichen unter sich in der Bedeutung gleichen Symbole, die in einer jeden dieser Teilsummen vorkommen, durch ein einziges zu ersetzen, und zwar sollen die Repräsentanten r so gewählt werden, daß ihre Gesamtheit ein reduziertes Restsystem (mod Δ) bildet. Nunmehr wenden wir auf die einzelnen Teilsummen die Euler-Maclaurinsche Formel an und erhalten dadurch die Gleichungen:

$$\varepsilon\Delta h\left(\frac{\Delta}{1}\right)\{f(a_1)+f(a_1+\varepsilon\Delta h)+f(a_1+2\varepsilon\Delta h)+\cdots+f(a_1+(l-1)\varepsilon\Delta h)\}$$
$$=\left(\frac{\Delta}{1}\right)\left[\int_{a_1}^{b_1}f(x)\,dx-\frac{\varepsilon\Delta h}{2}\{f(b_1)-f(a_1)\}+V^{(1)}+P_{2n}^{(1)}\right]$$

$$\varepsilon\Delta h\left(\frac{\Delta}{2}\right)\{f(a_2)+f(a_2+\varepsilon\Delta h)+f(a_2+2\varepsilon\Delta h)+\cdots+f(a_2+(l-1)\varepsilon\Delta h)\}$$
$$=\left(\frac{\Delta}{2}\right)\left[\int_{a_2}^{b_2}f(x)\,dx-\frac{\varepsilon\Delta h}{2}\{f(b_2)-f(a_2)\}+V^{(2)}+P_{2n}^{(2)}\right].$$

Die Anzahl dieser Gleichungen beträgt $\varepsilon\Delta-1$; die letzte derselben lautet:

$$\varepsilon\Delta h\left(\frac{\Delta}{\varepsilon\Delta-1}\right)\{f(a_{\varepsilon\Delta-1})+f(a_{\varepsilon\Delta-1}+\varepsilon\Delta h)+f(a_{\varepsilon\Delta-1}+2\varepsilon\Delta h)+\cdots+f(a_{\varepsilon\Delta-1}+(l-1)\varepsilon\Delta h)\}$$
$$=\left(\frac{\Delta}{\varepsilon\Delta-1}\right)\left[\int_{a_{\varepsilon\Delta-1}}^{b_{\varepsilon\Delta-1}}f(x)\,dx-\frac{\varepsilon\Delta h}{2}\{f(b_{\varepsilon\Delta-1})-f(a_{\varepsilon\Delta-1})\}+V^{(\varepsilon\Delta-1)}+P_{2n}^{(\varepsilon\Delta-1)}\right].$$

Dabei sind gesetzt worden:

$$a_s=a+sh,\quad b_s=b+sh=a_s+l\varepsilon\Delta h;$$

$$V^{(s)}=B_1\frac{(\varepsilon\Delta h)^2}{2!}\{f'(b_s)-f'(a_s)\}-B_2\frac{(\varepsilon\Delta h)^4}{4!}\{f'''(b_s)-f'''(a_s)\}+\cdots$$
$$+(-1)^nB_{n-1}\frac{(\varepsilon\Delta h)^{2n-2}}{(2n-2)!}\{f^{(2n-3)}(b_s)-f^{(2n-3)}(a_s)\},$$

$$P_{2n}^{(s)}=-\frac{(\varepsilon\Delta h)^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1\varphi(1-t,\,2n)\sum_{\varrho=0}^{l-1}f^{(2n)}(a_s+\varrho\varepsilon\Delta h+\varepsilon\Delta ht)\,dt.$$

Durch Addition dieser $\varepsilon\Delta-1$ Gleichungen erhalten wir die folgende, in der gleichzeitig die Teilsummen der linken Seiten wieder zur ursprünglichen Summe vereinigt sind:

$$\varepsilon\Delta h\sum_{r=1}^{l\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)f(a+rh)=\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\int_{a_r}^{b_r}f(x)\,dx-\frac{\varepsilon\Delta h}{2}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\{f(b_r)-f(a_r)\}+B_1\frac{(\varepsilon\Delta h)^2}{2!}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\{f'(b_r)-f'(a_r)\}\mp\cdots$$
$$+(-1)^nB_{n-1}\frac{(\varepsilon\Delta h)^{2n-2}}{(2n-2)!}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\{f^{(2n-3)}(b_r)-f^{(2n-3)}(a_r)\}+\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)P_{2n}^{(r)}.$$

Setzen wir die rechte Seite dieser Gleichung, abgesehen vom Reste, gleich einer neuen Funktion Φ, sehen dieselbe nur als von h abhängig an und entwickeln sie analog dem Satze:

$$\Phi(h)=\Phi(o)+\frac{h}{1}\Phi'(o)+\frac{h^2}{2!}\Phi''(o)+\cdots+\frac{h^{m-1}}{(m-1)!}\Phi^{(m-1)}(o)+\frac{h^m}{m!}\Phi^{(m)}(\vartheta h),\quad o<\vartheta<1,$$

nach Potenzen von h, so erhalten wir für die einzelnen Glieder dieser Reihe die Ausdrücke, in denen zur Abkürzung $f(x)_a^b = f(b) - f(a)$ gesetzt ist:

$$\Phi\ (o) = \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1} \binom{\Delta}{r} \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\frac{h}{1}\Phi'\ (o) = \frac{h}{1} f\ (x)_a^b \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r} r - \frac{\varepsilon\Delta h}{2} f\ (x)_a^b \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r},$$

$$\frac{h^2}{2!}\Phi''\ (o) = \frac{h^2}{2!} f'\ (x)_a^b \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r} r^2 - \frac{\varepsilon\Delta h^2}{2!} f'\ (x)_a^b \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r} r + B_1 \frac{(\varepsilon\Delta h)^2}{2!} f'\ (x)_a^b \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r},$$

$$\frac{h^3}{3!}\Phi'''\ (o) = \frac{h^3}{3!} f''\ (x)_a^b \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r} r^3 - \frac{\varepsilon\Delta h^3}{2.2!} f''\ (x)_a^b \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r} r^2 + B_1 \frac{(\varepsilon\Delta)^2 h^3}{2!} f''\ (x)_a^b \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r} r,$$

$$\frac{h^4}{4!}\Phi''''(o) = \frac{h^4}{4!} f'''(x)_a^b \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r} r^4 - \frac{\varepsilon\Delta h^4}{2.3!} f'''(x)_a^b \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r} r^3 + B_1 \frac{(\varepsilon\Delta)^2 h^4}{2.2!} f'''(x)_a^b \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r} r^2$$
$$- B_2 \frac{(\varepsilon\Delta h)^4}{4!} f'''(x)_a^b \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r}.$$

Vom $(2n-2)$. Differentialquotienten von $\Phi(h)$ an treten in den Koeffizienten der in $\Phi^{(m)}(h)$ vorkommenden Funktionen $f^{(s)}(x)$ keine Größen h mehr auf, die Differentialquotienten hängen also nur noch von denen der Funktionen $f(b_r)$ und $f(a_r)$ ab. Brechen wir beim $(2n-2)$. Gliede ab, so lautet der Rest der Entwicklung:

$$\frac{h^{2n-2}}{(2n-2)!}\Phi^{(2n-2)}(\vartheta h) = \frac{h^{2n-2}}{(2n-2)!} f^{(2n-3)}(x+\vartheta h)\Big|_{x=a}^{x=b} \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r} r^{2n-2} - \frac{\varepsilon\Delta h^{2n-2}}{2.(2n-3)!} f^{(2n-3)}(x+\vartheta h) \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r} r^{2n-3}$$
$$+ B_1 \frac{(\varepsilon\Delta)^2 h^{2n-2}}{2.(2n-4)!} f^{(2n-3)}(x+\vartheta h) \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r} r^{2n-4} \mp \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} B_{n-2} \frac{(\varepsilon\Delta)^{2n-4} h^{2n-2}}{2!\,(2n-4)!} f^{(2n-3)}(x+\vartheta h) \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r} r^2$$
$$+ (-1)^n B_{n-1} \frac{(\varepsilon\Delta h)^{2n-2}}{(2n-2)!} f^{(2n-3)}(x+\vartheta h) \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r}.$$

Brechen wir aber erst beim folgenden, also dem $(2n-1)$. Gliede ab, so nimmt dann der Rest die Form an:

$$\frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!}\Phi^{(2n-1)}(\vartheta h) = \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{(2n-2)}(x+\vartheta h) \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r} r^{2n-1} - \frac{\varepsilon\Delta h^{2n-1}}{2.(2n-2)!} f^{(2n-2)}(x+\vartheta h) \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r} r^{2n-2}$$
$$+ B_1 \frac{(\varepsilon\Delta)^2 h^{2n-1}}{2.(2n-3)!} f^{(2n-2)}(x+\vartheta h) \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r} r^{2n-3} \mp \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} B_{n-2} \frac{(\varepsilon\Delta)^{2n-4} h^{2n-1}}{3!\,(2n-4)!} f^{(2n-2)}(x+\vartheta h) \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r} r^3$$
$$+ (-1)^n B_{n-1} \frac{(\varepsilon\Delta)^{2n-2} h^{2n-1}}{(2n-2)!} f^{2n-2}(x+\vartheta h) \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r} r.$$

Die Summe $\sum_{r=1}^{l\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)f(a+rh)$ läßt sich nunmehr folgendermaßen darstellen:

$$\sum_{r=1}^{l\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)f(a+rh)=\{f\ (b)-f\ (a)\}\frac{1}{\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r$$
$$+\ \varepsilon\Delta h\ \{f'\ (b)-f'\ (a)\}\left[-\frac{1}{2\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r+\frac{1}{2(\varepsilon\Delta)^2}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r^2\right]$$
$$+(\varepsilon\Delta h)^2\{f''(b)-f''(a)\}\left[\frac{B_1}{2!\,\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r-\frac{1}{2.2!(\varepsilon\Delta)^2}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r^2+\frac{1}{3!(\varepsilon\Delta)^3}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r^3\right]$$
$$+(\varepsilon\Delta h)^3\{f'''(b)-f'''(a)\}\left[\frac{B_1}{2.2!(\varepsilon\Delta)^2}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r^2-\frac{1}{2.3!(\varepsilon\Delta)^3}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r^3+\frac{1}{4!(\varepsilon\Delta)^4}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r^4\right]$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left\{\begin{aligned}&+(\varepsilon\Delta h)^{2n-3}\{f^{(2n-3)}(b+\vartheta h)-f^{(2n-3)}(a+\vartheta h)\}\Bigg[(-1)^{n-1}\frac{B_{n-2}}{2!\,(2n-4)!\,(\varepsilon\Delta)^2}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r^2\\&\qquad+(-1)^{n-2}\frac{B_{n-3}}{4!\,(2n-6)!\,(\varepsilon\Delta)^4}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r^4\pm\cdots\\&\qquad+\frac{1}{(2n-2)!\,(\varepsilon\Delta)^{2n-2}}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r^{2n-2}\Bigg]\\&+(\varepsilon\Delta h)^{2n-2}\{f^{(2n-2)}(b+\vartheta h)-f^{(2n-2)}(a+\vartheta h)\}\Bigg[(-1)^{n}\frac{B_{n-1}}{(2n-2)!\,\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r\\&\qquad+(-1)^{n-1}\frac{B_{n-2}}{3!\,(2n-4)!\,(\varepsilon\Delta)^3}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r^3\pm\cdots\\&\qquad+\frac{1}{(2n-1)!\,(\varepsilon\Delta)^{2n-1}}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r^{2n-1}\Bigg]\end{aligned}\right.$$
$$+\frac{1}{\varepsilon\Delta h}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)P_{2n}^{(r)}.$$

Beachten wir nunmehr aber die bekannten Beziehungen:

$$B\,(m,\Delta)=\sum_{k=1}^{m}\frac{B\,(m-k)}{k!\,(\varepsilon\Delta)^k}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r^k;$$
$$B\,(0)=1,\quad B\,(1)=-\frac{1}{2},\quad B\,(2n+1)=0\ \text{für}\ n\geq 1;$$
$$B\,(2n)=\frac{B_n}{(2n)!},$$

so folgt, daß die Ausdrücke in den eckigen Klammern gerade die Bernoullischen Zahlen $B\,(m,\Delta)$ bedeuten. Infolgedessen gewinnen wir für unsere Summe die Gleichung:

$$\sum_{r=1}^{l\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)f(a+rh)=B\,(1,\Delta)\{f(b)-f(a)\}+B\,(2,\Delta)\,\varepsilon\Delta h\{f'(b)-f'(a)\}+B\,(3,\Delta)\,(\varepsilon\Delta h)^2\{f''(b)-f''(a)\}$$
$$+\cdots\left\{\begin{aligned}&+B\,(2n-2,\Delta)\,(\varepsilon\Delta h)^{2n-3}\{f^{(2n-3)}(b+\vartheta h)-f^{(2n-3)}(a+\vartheta h)\}\\&+B\,(2n-1,\Delta)\,(\varepsilon\Delta h)^{2n-2}\{f^{(2n-2)}(b+\vartheta h)-f^{(2n-2)}(a+\vartheta h)\}\end{aligned}\right.$$
$$+\frac{1}{\varepsilon\Delta h}\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)P_{2n}^{(r)}.$$

Das Restglied $\frac{1}{\varepsilon \Delta h} \sum_{r=1}^{\varepsilon \Delta - 1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) P_{2n}^{(r)}$ besitzt hierbei die Form:

$$-\frac{(\varepsilon \Delta h)^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 \varphi(t, 2n) \sum_{r=1}^{\varepsilon \Delta - 1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \sum_{\varrho=0}^{l-1} f^{(2n)}(a + \varrho \varepsilon \Delta h + rh + \varepsilon \Delta h t)\, dt.$$

Setzen wir zur Vereinfachung:

$$\sum_{\varrho=0}^{l-1} f^{(2n)}(a + \varrho \varepsilon \Delta h + rh + \varepsilon \Delta h t) = U_{2n}^{(r)}(t),$$

so erhalten wir je nach den Werten der Diskriminante Δ die beiden Summenformeln:

(1) $\Delta > 0$: $\qquad B(2n-1, \Delta) = 0$

$$\sum_{r=1}^{l\Delta - 1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) f(a + rh) = B(2, \Delta)\, \Delta h \{f'(b) - f'(a)\} + B(4, \Delta)(\Delta h)^3 \{f'''(b) - f'''(a)\}$$

$$+ \cdots + B(2n-4, \Delta)(\Delta h)^{2n-5} \{f^{(2n-5)}(b) - f^{(2n-5)}(a)\}$$

$$+ B(2n-2, \Delta)(\Delta h)^{2n-3} \{f^{(2n-3)}(b + \vartheta h) - f^{(2n-3)}(a + \vartheta h)\}$$

$$-\frac{(\Delta h)^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 \varphi(t, 2n) \sum_{r=1}^{\Delta - 1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) U_{2n}^{(r)}(t)\, dt. \qquad 0 < \vartheta < 1.$$

(2) $\Delta < 0$: $\qquad B(2n, \Delta) = 0.$

$$\sum_{r=1}^{-l\Delta - 1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) f(a + rh) = B(1, \Delta)\{f(b) - f(a)\} + B(3, \Delta)(-\Delta h)^2 \{f''(b) - f''(a)\} + \cdots$$

$$+ B(2n-3, \Delta)(-\Delta h)^{2n-4} \{f^{(2n-4)}(b) - f^{(2n-4)}(a)\}$$

$$+ B(2n-1, \Delta)(-\Delta h)^{2n-2} \{f^{(2n-2)}(b + \vartheta h) - f^{(2n-2)}(a + \vartheta h)\}$$

$$-\frac{(-\Delta h)^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 \varphi(t, 2n) \sum_{r=1}^{-\Delta - 1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) U_{2n}^{(r)}(t)\, dt. \qquad 0 < \vartheta < 1.$$

Der Rest P jeder der beiden Summenformeln besteht demnach aus zwei Teilen P_1 und P_2, von denen P_1 sich unmittelbar an die Glieder der Reihe anschließt, während P_2 unter Anwendung der Methoden von Saalschütz[15]) auch auf folgende vom Integralzeichen freie Form gebracht werden kann:

$$P_2 = (-1)^{n+1} \frac{(\varepsilon \Delta h)^{2n}}{(2n)!} B_n \sum_{r=1}^{\varepsilon \Delta - 1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \sum_{\varrho=0}^{l-1} f^{(2n)}(a + \varrho \varepsilon \Delta h + rh + \varepsilon \Delta h \vartheta'), \qquad 0 < \vartheta' < 1.$$

Nehmen wir die Bedingung hinzu, daß die Summe $U_{2n}^{(r)}(t)$ zwischen $t = 0$ und $t = 1$ nicht ihr Zeichen ändert, so läßt sich dieser Rest auch folgendermaßen schreiben:

$$P_2 = (-1)^{n+1} \frac{(\varepsilon \Delta h)^{2n-1}}{(2n)!} \cdot \frac{2^{2n} - 1}{2^{2n-1}} B_n \sum_{r=1}^{\varepsilon \Delta - 1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \{f^{(2n-1)}(b_r) - f^{(2n-1)}(a_r)\} \cdot \Theta^{(r)}; \quad 0 < \Theta^{(r)} < 1.$$

Ist außerdem noch die Bedingung erfüllt, daß auch:

$$U_{2n+2}^{(r)}(t) = \sum_{\varrho=0}^{l-1} f^{(2n+2)}(a + \varrho \varepsilon \Delta h + rh + \varepsilon \Delta h t)$$

das Zeichen beibehält, während t von 0 bis 1 geht, so gelten folgende Formeln:

$$P_2 = (-1)^n \cdot B_n \frac{(\varepsilon \Delta h)^{2n-1}}{(2n)!} \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \Theta^{(r)} \{ f^{(2n-1)}(b_r) - f^{(2n-1)}(a_r) \}, \quad \text{wenn } U_{2n+2}^{(r)}(t) \cdot U_{2n}^{(r)}(t) > 0;$$

$$P_2 = (-1)^{n+1} \cdot B_n \frac{(\varepsilon \Delta h)^{2n-1}}{(2n)!} \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \Theta'^{(r)} \{ f^{(2n-1)}(b_r) - f^{(2n-1)}(a_r) \}, \quad \text{wenn } U_{2n+2}^{(r)}(t) \cdot U_{2n}^{(r)}(t) < 0,$$

wobei $\Theta^{(r)}$ und $\Theta'^{(r)}$ ebenfalls positive echte Brüche bedeuten und in der vorangehenden Reihe n überall durch $n+1$ zu ersetzen ist.

Es ist nun von Interesse, daß dieselbe Summenformel noch auf einem anderen Wege abgeleitet werden kann, welcher außerdem auch eine andere Darstellung des Restes ermöglicht. Wir denken uns hierzu die von Krause[12]) aufgestellte Summenformel vorgelegt:

$$(\omega - 1)\{ f(x) + \omega \cdot f(x+h) + \omega^2 f(x+2h) + \cdots + \omega^{l-1} f(x + (l-1)h) \}$$

$$= \omega^l f(x+lh) - f(x) + \frac{b_1 h}{1} \{ \omega^l f'(x+lh) - f'(x) \} + \frac{b_2 h^2}{2!} \{ \omega^l f''(x+lh) - f''(x) \} + \cdots$$

$$+ \frac{b_m h^m}{m!} \{ \omega^l f^{(m)}(x+lh) - f^{(m)}(x) \} - \frac{\omega h^{m+1}}{m!} \int_0^1 B_m(1-t, u_r) S_m \, dt;$$

$$S_m = \sum_{\varrho=0}^{l-1} \omega^\varrho f^{(m+1)}(x + \varrho h + ht)\, dt; \qquad \omega = e^{\frac{2r\pi i}{\varepsilon\Delta}}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser aus der Theorie der ultrabernoullischen Zahlen gewonnenen Formel mit $c = \frac{1}{\omega - 1}$ und setzen zugleich an Stelle von l überall $\varepsilon \Delta l$, so daß:

$$\omega^l = e^{\frac{2r\pi i \varepsilon \Delta l}{\varepsilon \Delta}} = 1,$$

so geht die obige Gleichung, vorerst abgesehen vom Reste, über in die folgende:

$$f(x) + \omega f(x+h) + \omega^2 f(x+2h) + \cdots + \omega^{\varepsilon\Delta l - 1} f(x + (\varepsilon \Delta l - 1)h)$$

$$= c\{ f(x + \varepsilon \Delta l h) - f(x) \} + \frac{c b_1 h}{1} \{ f'(x + l\varepsilon\Delta h) - f'(x) \} + \cdots$$

$$+ \frac{c b_m h^m}{m!} \{ f^{(m)}(x + \varepsilon \Delta l h) - f^{(m)}(x) \}.$$

Lassen wir hierin r der Reihe nach die Werte $1, 2, \cdots \varepsilon\Delta - 1$ durchlaufen und multiplizieren die entstehenden Gleichungen nacheinander mit $\left(\frac{\Delta}{1}\right), \left(\frac{\Delta}{2}\right), \cdots \left(\frac{\Delta}{\varepsilon\Delta - 1}\right)$, so erhalten wir durch Addition dieser $(\varepsilon\Delta - 1)$ Gleichungen die folgende:

$$\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) f(x) + \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \omega f(x+h) + \cdots + \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \omega^{\varepsilon\Delta l - 1} f(x + (\varepsilon\Delta l - 1)h)$$

$$= \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) c\{ f(x + \varepsilon\Delta l h) - f(x) \} + \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \frac{c b_1 h}{1} \{ f'(x + \varepsilon\Delta l h) - f'(x) \} + \cdots$$

$$+ \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \frac{c b_m h^m}{m!} \{ f^{(m)}(x + \varepsilon\Delta l h) - f^{(m)}(x) \}.$$

Unter gleichzeitiger Anwendung der bekannten Formeln:

$$\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \text{const.} = 0, \quad \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \omega^k = \left(\frac{\Delta}{k}\right) (\sqrt{\Delta})$$

und der im ersten Paragraphen entwickelten Resultate:

$$\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right) cb_{2n-1} = \frac{(2n-1)!\,(\varepsilon\Delta)^{2n}}{\sqrt{\Delta}} B(2n,\Delta) \qquad \text{für } \Delta > 0,\ n \geqq 1,$$

$$\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right) cb_{2n} = \frac{i(2n)!\,(\varepsilon\Delta)^{2n+1}}{\sqrt{-\Delta}} B(2n+1,\Delta) \quad \text{für } \Delta < 0,\ n \geq 1; \quad \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right) c = \frac{i\varepsilon\Delta}{\sqrt{-\Delta}} B(1,\Delta) \quad \text{für } \Delta < 0$$

gewinnen wir folgende Gleichung, indem wir noch x durch a, $x + \varepsilon\Delta l h$ durch b ersetzen:

$$(\sqrt{\Delta}) \sum_{r=1}^{l\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right) f(a+rh) = iB(1,\Delta)\sqrt{\varepsilon\Delta}\{f(b)-f(a)\} + B(2,\Delta)\,\varepsilon\Delta h\sqrt{\varepsilon\Delta}\{f'(b)-f'(a)\}$$
$$+ iB(3,\Delta)(\varepsilon\Delta h)^2\sqrt{\varepsilon\Delta}\{f''(b)-f''(a)\} + \cdots + B(2n,\Delta)(\varepsilon\Delta h)^{2n-1}\sqrt{\varepsilon\Delta}\{f^{(2n-1)}(b)-f^{(2n-1)}(a)\}$$
$$+ iB(2n+1,\Delta)(\varepsilon\Delta h)^{2n}\sqrt{\varepsilon\Delta}\{f^{(2n)}(b)-f^{(2n)}(a)\}.$$

Da nun

$$(\sqrt{\Delta}) = \sqrt{\Delta} \qquad \text{für } \Delta > 0,$$
$$(\sqrt{\Delta}) = i\sqrt{-\Delta} \qquad \text{für } \Delta < 0,$$

so ergeben sich durch Trennung der reellen und imaginären Teile auf beiden Seiten sofort die gewünschten Summenformeln:

$$\underline{\sum_{r=1}^{\Delta l-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right) f(a+rh) = B(2,\Delta)\,\Delta h\{f'(b)-f'(a)\} + B(4,\Delta)(\Delta h)^3\{f'''(b)-f'''(a)\} + \cdots}$$
$$\underline{+ B(2n,\Delta)(\Delta h)^{2n-1}\{f^{(2n-1)}(b)-f^{(2n-1)}(a)\}} \qquad \text{für } \Delta > 0;$$

$$\underline{\sum_{r=1}^{-\Delta l-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right) f(a+rh) = B(1,\Delta)\{f(b)-f(a)\} + B(3,\Delta)(-\Delta h)^2\{f''(b)-f''(a)\} + \cdots}$$
$$\underline{+ B(2n+1,\Delta)(-\Delta h)^{2n}\{f^{(2n)}(b)-f^{(2n)}(a)\}} \qquad \text{für } \Delta < 0.$$

Der Rest macht eine gesonderte Betrachtung nötig; er hat durch das angewandte Verfahren die folgende Darstellung erhalten:

$$P_m = \sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{\omega h^{m+1}}{m!\,(\sqrt{\Delta})}\int_0^1 B_m(1-t,u_r)\sum_{\varrho=0}^{\varepsilon\Delta l-1}\omega^{\varrho} f^{(m+1)}(a+\varrho h+ht)\,dt.$$

Es ist nun nach **Krause**:

$$\omega B_m(1-t,u_r) = (-1)^{m-1} B_m(t,-u_r)$$

und

$$2B_m(t,-u_r) = B''_m(t,u_r) - B'_m(t,u_r),$$

wobei B''_m reell, B'_m rein imaginär ist. Wir erhalten demnach:

$$\omega B_m(1-t,u_r) = (-1)^{m-1}\frac{1}{2}\{B''_m(t,u_r) - B'_m(t,u_r)\}.$$

Ferner erhalten wir durch Zerlegung von ω^{ϱ}:

$$\omega^{\varrho} = \cos\frac{2r\varrho\pi}{\varepsilon\Delta} + i\sin\frac{2r\varrho\pi}{\varepsilon\Delta}.$$

Das Restglied P_m läßt sich also allgemein in die Form bringen:

$$P_m = (-1)^{m+1}\frac{h^{m+1}}{2\cdot m!\,(\sqrt{\Delta})}\int_0^1\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\{B''_m(t,u_r)-B'_m(t,u_r)\}\sum_{\varrho=0}^{\varepsilon\Delta l-1}\left\{\cos\frac{2r\varrho\pi}{\varepsilon\Delta} + i\sin\frac{2r\varrho\pi}{\varepsilon\Delta}\right\} f^{(m+1)}(a+\varrho h+ht)\,dt.$$

Die Trennung des reellen Teiles vom imaginären ergibt:

$$P_m = (-1)^{m+1} \frac{h^{m+1}}{2 \cdot m!\,(\sqrt{\Delta})} \int\limits_0^1 \sum_{r=1}^{s\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \sum_{\varrho=0}^{s\Delta l-1} \left\{ B''_m(t, u_r) \cos \frac{2r\varrho\pi}{s\Delta} - i\, B'_m(t, u_r) \sin \frac{2r\varrho\pi}{s\Delta} \right\} f^{(m+1)}(a+\varrho h+ht)\, dt$$

(reell $\Delta > 0$)

$$+ (-1)^{m+1} \frac{h^{m+1}}{2 \cdot m!\,(\sqrt{\Delta})} \int\limits_0^1 \sum_{r=1}^{s\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \sum_{\varrho=0}^{s\Delta l-1} \left\{ i\, B''_m(t, u_r) \sin \frac{2r\varrho\pi}{s\Delta} - B'_m(t, u_r) \cos \frac{2r\varrho\pi}{s\Delta} \right\} f^{(m+1)}(a+\varrho h+ht)\, dt$$

(reell für $\Delta < 0$).

Je nachdem also $\Delta \gtrless 0$, ist zu den angegebenen Summenformeln der eine oder andere der beiden Teilausdrücke von P_m hinzuzufügen.

Wir betrachten zur Umformung dieser Werte die beiden Fälle einer positiven und negativen Diskriminante gesondert.

(1) $\underline{\Delta > 0}$: Wir untersuchen von dem in Frage kommenden ersten Teil von P_m den Ausdruck:

$$B'_m(t, u_r) \cos \frac{2r\varrho\pi}{\Delta} - i\, B'_m(t, u_r) \sin \frac{2r\varrho\pi}{\Delta},$$

indem wir zunächst $m = 2n$ als gerade Zahl annehmen wollen. Es darf nun gesetzt werden:

$$\cos \frac{2r\varrho\pi}{\Delta} = \cos(l\Delta + r)\frac{2\varrho\pi}{\Delta} = \cos(l\Delta - r)\frac{2\varrho\pi}{\Delta},$$

$$\sin \frac{2r\varrho\pi}{\Delta} = \sin(l\Delta + r)\frac{2\varrho\pi}{\Delta} = -\sin(l\Delta - r)\frac{2\varrho\pi}{\Delta}.$$

Ferner lautet das allgemeine Glied in der Darstellung von $B''_{2n}(\Delta t, u_r)$ durch eine trigonometrische Reihe für $0 \leq t \leq \frac{1}{\Delta}$:

$$(-1)^n \frac{2 \cdot (2n)!\, \Delta^{2n+1}}{(2\pi)^{2n+1}} \left\{ \frac{\sin 2\pi(l\Delta+r)t}{(l\Delta+r)^{2n+1}} + \frac{\sin 2\pi(l\Delta-r)t}{(l\Delta-r)^{2n+1}} \right\}.$$

Dasselbe soll im vorliegenden Falle multipliziert werden mit $\cos \frac{2r\varrho\pi}{\Delta}$, das heißt aber, das Produkt ist zu bilden:

$$(-1)^n \frac{2(2n)!\, \Delta^{2n+1}}{(2\pi)^{2n+1}} \left\{ \frac{\sin 2\pi(l\Delta+r)t}{(l\Delta+r)^{2n+1}} \cos(l\Delta + r)\frac{2\varrho\pi}{\Delta} + \frac{\sin 2\pi(l\Delta-r)t}{(l\Delta-r)^{2n+1}} \cos(l\Delta - r)\frac{2\varrho\pi}{\Delta} \right\}.$$

Genau entsprechend lautet das allgemeine Glied in der trigonometrischen Darstellung von $-i\, B'_{2n}(\Delta t, u_r)$:

$$(-1)^{n+1} \frac{2 \cdot (2n)!\, \Delta^{2n+1}}{(2\pi)^{2n+1}} \left\{ \frac{\cos 2\pi(l\Delta+r)t}{(l\Delta+r)^{2n+1}} - \frac{\cos 2\pi(l\Delta-r)t}{(l\Delta-r)^{2n+1}} \right\}.$$

Dasselbe ist zu multiplizieren mit $\sin \frac{2r\varrho\pi}{\Delta}$, also das Produkt zu bilden:

$$(-1)^{n+1} \frac{2 \cdot (2n)!\, \Delta^{2n+1}}{(2\pi)^{2n+1}} \left\{ \frac{\cos 2\pi(l\Delta+r)t}{(l\Delta+r)^{2n+1}} \cdot \sin(l\Delta + r)\frac{2\varrho\pi}{\Delta} + \frac{\cos 2\pi(l\Delta-r)t}{(l\Delta-r)^{2n+1}} \cdot \sin(l\Delta - r)\frac{2\varrho\pi}{\Delta} \right\}.$$

Demnach finden wir für das allgemeine Glied des zu untersuchenden Ausdruckes die Form

$$(-1)^n \frac{2 \cdot (2n)!\, \Delta^{2n+1}}{(2\pi)^{2n+1}} \left\{ \frac{\sin 2\pi(l\Delta+r)\left(t - \frac{\varrho}{\Delta}\right)}{(l\Delta+r)^{2n+1}} + \frac{\sin 2\pi(l\Delta-r)\left(t - \frac{\varrho}{\Delta}\right)}{(l\Delta-r)^{2n+1}} \right\}.$$

Die Zusammenfassung sämtlicher Glieder ergibt dann die Gleichung:

$$B''_{2n}(\varDelta t, u_r)\cos\frac{2r\varrho\pi}{\varDelta} - i B'_{2n}(\varDelta t, u_r)\sin\frac{2r\varrho\pi}{\varDelta}$$
$$= (-1)^n \frac{2(2n)!\,\varDelta^{2n+1}}{(2\pi)^{2n+1}}\left\{\frac{\sin 2r\pi\left(t-\frac{\varrho}{\varDelta}\right)}{r^{2n+1}} + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\sin 2\pi(l\varDelta+r)\left(t-\frac{\varrho}{\varDelta}\right)}{(l\varDelta+r)^{2n+1}} + \frac{\sin 2\pi(l\varDelta-r)\left(t-\frac{\varrho}{\varDelta}\right)}{(l\varDelta-r)^{2n+1}}\right)\right\}.$$

Weiterhin folgt

$$\sum_{r=1}^{\varDelta-1}\left(\frac{\varDelta}{r}\right)\left\{B''_{2n}(\varDelta t, u_r)\cos\frac{2r\varrho\pi}{\varDelta} - i B'_{2n}(\varDelta t, u_r)\sin\frac{2r\varrho\pi}{\varDelta}\right\}$$
$$= (-1)^{n+1}\frac{4\cdot(2n)!\,\varDelta^{2n+1}}{(2\pi)^{2n+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\varDelta}{k}\right)\frac{\sin 2k\pi\left(\frac{\varrho}{\varDelta}-t\right)}{k^{2n+1}}.$$

Es ist aber nach Berger für alle Werte $\left(\frac{\varrho}{\varDelta}-t\right)=z,\quad z\geqq 0$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\varDelta}{k}\right)\frac{\sin 2k\pi\left(\frac{\varrho}{\varDelta}-t\right)}{k^{2n+1}} = (-1)^{n+1}\frac{(2\pi)^{2n+1}}{2\sqrt{\varDelta}}\left\{\varphi\left(\frac{\varrho}{\varDelta}-t,\ 2n+1,\ \varDelta\right) - \frac{1}{\Gamma(2n+1)}\sum_{r=0}^{s=E(\varrho-\varDelta t)}\left(\frac{\varDelta}{r}\right)\left(\frac{\varrho}{\varDelta}-t-\frac{r}{\varDelta}\right)^{2n}\right\}.$$

Somit erhalten wir:

$$\sum_{r=1}^{\varDelta-1}\left(\frac{\varDelta}{r}\right)\left\{B''_{2n}(\varDelta t, u_r)\cos\frac{2r\varrho\pi}{\varDelta} - i B_{2n}(\varDelta t, u_r)\sin\frac{2r\varrho\pi}{\varDelta}\right\}$$
$$= \frac{2(2n)!\,\varDelta^{2n+1}}{\sqrt{\varDelta}}\left\{\varphi\left(\frac{\varrho}{\varDelta}-t,\ 2n+1,\ \varDelta\right) - \frac{1}{\Gamma(2n+1)}\sum_{r=0}^{s}\left(\frac{\varDelta}{r}\right)\left(\frac{\varrho-r}{\varDelta}-t\right)^{2n}\right\}.$$

Kehren wir jetzt zum Reste selbst zurück, so erhalten wir aus ihm durch Substitution, nachdem wir noch vorher $\varDelta t$ statt t eingeführt haben, das Resultat:

$$P_{2n} = -(\varDelta h)^{2n+1}\int_0^{\frac{1}{\varDelta}}\sum_{\varrho=0}^{l\varDelta-1}\left\{\varphi\left(\frac{\varrho}{\varDelta}-t,\ 2n+1,\ \varDelta\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\Gamma(2n+1)}\sum_{r=0}^{s}\left(\frac{\varDelta}{r}\right)\left(\frac{\varrho-r}{\varDelta}-t\right)^{2n}\right\} f^{(2n+1)}(a+\varrho h+\varDelta h t)\,dt.$$

Wählen wir in P_m an zweiter Stelle $m = 2n+1$ als ungerade Zahl, so handelt es sich um die Umformung des Ausdruckes:

$$B''_{2n+1}(t, u_r)\cos\frac{2r\varrho\pi}{\varDelta} - i B'_{2n+1}(t, u_r)\sin\frac{2r\varrho\pi}{\varDelta}.$$

Wir benutzen wieder die trigonometrischen Reihen, deren allgemeine Glieder diesmal die Formen annehmen:

$$(-1)^n\frac{2(2n+1)!\,\varDelta^{2n+2}}{(2\pi)^{2n+2}}\left\{\frac{\cos(l\varDelta+r)2\pi t}{(l\varDelta+r)^{2n+2}} + \frac{\cos(l\varDelta-r)2\pi t}{(l\varDelta-r)^{2n+2}}\right\}$$

und

$$(-1)^{n+1}\frac{2\cdot(2n+1)!\,\varDelta^{2n+2}}{(2\pi)^{2n+2}}\left\{\frac{\sin(l\varDelta+r)2\pi t}{(l\varDelta+r)^{2n+2}} - \frac{\sin(l\varDelta-r)2\pi t}{(l\varDelta-r)^{2n+2}}\right\}.$$

Die Produktbildung und Zusammenfassung aller Glieder liefert die Gleichung

$$\sum_{r=1}^{\varDelta-1}\left(\frac{\varDelta}{r}\right)\left\{B''_{2n+1}(\varDelta t, u_r)\cos\frac{2r\varrho\pi}{\varDelta} - i B'_{2n+1}(\varDelta t, u_r)\sin\frac{2r\varrho\pi}{\varDelta}\right\}$$
$$= (-1)^n\frac{4(2n+1)!\,\varDelta^{2n+2}}{(2\pi)^{2n+2}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\varDelta}{k}\right)\frac{\cos 2k\pi\left(\frac{\varrho}{\varDelta}+t\right)}{k^{2n+2}}.$$

Da weiter

$$\frac{2\sqrt{\Delta}}{(2\pi)^{2n+2}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\cos 2k\pi\left(\frac{\varrho}{\Delta}+t\right)}{k^{2n+2}} = (-1)^n\left\{B(2n+2,\,\Delta)+\varphi\left(\frac{\varrho}{\Delta}+t,\,2n+2,\,\Delta\right) - \frac{1}{\Gamma(2n+2)}\sum_{r=0}^{s=E(\varrho+\Delta t)}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(\frac{\varrho-r}{\Delta}+t\right)^{2n+1}\right\},$$

so lautet der Rest der Summenformel:

$$P_{2n+1} = (\Delta h)^{2n+2}\int_0^{\frac{1}{\Delta}}\sum_{\varrho=0}^{l\Delta-1}\left\{B(2n+2,\,\Delta)+\varphi\left(\frac{\varrho}{\Delta}+t,\,2n+2,\,\Delta\right) - \frac{1}{\Gamma(2n+2)}\sum_{r=0}^{s}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(\frac{\varrho-r}{\Delta}+t\right)^{2n+1}\right\}f^{(2n+2)}(a+\varrho h+\Delta h t)\,dt.$$

Unter Einführung der Bezeichnung:

$$F_m(t) = B(m,\,\Delta)+\varphi(t,\,m,\,\Delta) - \frac{1}{\Gamma(m)}\sum_{r=0}^{s}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(t-\frac{r}{\Delta}\right)^{m-1}$$

läßt sich der Rest für gerade und ungerade Werte von m und für positive Werte der Diskriminante auch auf folgende gemeinsame Form bringen:

$$\underline{P_m = (-1)^{m+1}(\Delta h)^{m+1}\int_0^{\frac{1}{\Delta}}\sum_{\varrho=0}^{l\Delta-1}F_{m+1}\left(\frac{\varrho}{\Delta}+(-1)^{m+1}t\right)f^{m+1}(a+\varrho h+\Delta h t)\,dt;}$$

2. $\underline{\Delta < 0.}$ Dann gilt also die Restdarstellung:

$$P_m = (-1)^{m+1}\frac{h^{m+1}}{2\cdot m!\sqrt{-\Delta}}\int_0^1\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\sum_{\varrho=0}^{-l\Delta-1}\left\{B''_m(t,\,u_r)\sin\frac{2r\varrho\pi}{-\Delta}+iB'_m(t,\,u_r)\cos\frac{2r\varrho\pi}{-\Delta}\right\}f^{(m+1)}(a+\varrho h+ht)\,dt.$$

Wir versuchen auch hier den Ausdruck in den geschlungenen Klammern zu transformieren; die allgemeinen Glieder in den trigonometrischen Reihen für $B''_m(\Delta t,\,u_r)$ und $iB'_m(\Delta t,\,u_r)$ lauten für $m = 2n+1$:

$$(-1)^n\frac{2(2n+1)!\,(-\Delta)^{2n+2}}{(2\pi)^{2n+2}}\left\{\frac{\cos(-l\Delta+r)2\pi t}{(-l\Delta+r)^{2n+2}}+\frac{\cos(-l\Delta-r)2\pi t}{(-l\Delta-r)^{2n+2}}\right\},$$

$$(-1)^n\frac{2(2n+1)!\,(-\Delta)^{2n+2}}{(2\pi)^{2n+2}}\left\{\frac{\sin(-l\Delta+r)2\pi t}{(-l\Delta+r)^{2n+2}}-\frac{\sin(-l\Delta-r)2\pi t}{(-l\Delta-r)^{2n}}\right\}.$$

Mithin ergibt sich für das allgemeine Glied des betrachteten Ausdruckes:

$$(-1)^n\frac{2(2n+1)!\,(-\Delta)^{2n+2}}{(2\pi)^{2n+2}}\left\{\frac{\sin 2\pi(-l\Delta+r)\left(\frac{\varrho}{-\Delta}+t\right)}{(-l\Delta+r)^{2n+2}}-\frac{\sin 2\pi(-l\Delta-r)\left(\frac{\varrho}{-\Delta}+t\right)}{(-l\Delta-r)^{2n+2}}\right\}.$$

Auf Grund dieses Wertes können wir jetzt die Gleichung ableiten:

$$\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left\{B''_{2n+1}(\Delta t,\,u_r)\sin\frac{2r\varrho\pi}{-\Delta}+iB'_{2n+1}(\Delta t,\,u_r)\cos\frac{2r\varrho\pi}{-\Delta}\right\}$$
$$= (-1)^n\frac{4\cdot(2n+1)!\,(-\Delta)^{2n+2}}{(2\pi)^{2n+2}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\sin 2k\pi\left(\frac{\varrho}{-\Delta}+t\right)}{k^{2n+2}}.$$

Verbinden wir dieselbe mit der folgenden, so erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\sin 2k\pi\left(\frac{\varrho}{-\Delta}+t\right)}{k^{2n+2}}=(-1)^{n+1}\frac{(2\pi)^{2n+2}}{2\sqrt{-\Delta}}\left\{\varphi\left(\frac{\varrho}{-\Delta}+t,\ 2n+2,\ \Delta\right)+\frac{1}{\Gamma(2n+2)}\sum_{r=0}^{s}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(\frac{\varrho-r}{-\Delta}+t\right)^{2n+1}\right\},$$

$$\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left\{B''_{2n+1}(\Delta t,\ u_r)\sin\frac{2r\varrho\pi}{-\Delta}+iB'_{2n+1}(\Delta t,\ u_r)\cos\frac{2r\varrho\pi}{-\Delta}\right\}$$

$$=-\frac{2(2n+1)!\,(-\Delta)^{2n+2}}{\sqrt{-\Delta}}\left\{\varphi\left(\frac{\varrho}{-\Delta}+t, 2n+2, \Delta\right)+\frac{1}{\Gamma(2n+2)}\sum_{r=0}^{s}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(\frac{\varrho-r}{-\Delta}+t\right)^{2n+1}\right\}.$$

Der Rest selbst lautet dann:

$$P_{2n+1}=-(-\Delta h)^{2n+2}\int_{0}^{\frac{1}{-\Delta}}\sum_{\varrho=0}^{-l\Delta-1}\left\{\varphi\left(\frac{\varrho}{-\Delta}+t,2n+2,\Delta\right)+\frac{1}{\Gamma(2n+2)}\sum_{r=0}^{s}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(\frac{\varrho-r}{-\Delta}+t\right)^{2n+1}\right\}f^{(2n+2)}\big(a+\varrho h+(-\Delta h t)\big)\,dt.$$

Im Falle eines geraden $m=2n$ haben die Glieder von $B''_{2n}(\Delta t,\ u_r)$ und $iB'_{2n}(\Delta t,\ u_r)$ die Formen:

$$(-1)^{n}\frac{2(2n)!\,(-\Delta)^{2n+1}}{(2\pi)^{2n+1}}\left\{\frac{\sin(-l\Delta+r)2\pi t}{(-l\Delta+r)^{2n+1}}+\frac{\sin(-l\Delta-r)2\pi t}{(-l\Delta-r)^{2n+1}}\right\},$$

$$(-1)^{n}\frac{2(2n)!\,(-\Delta)^{2n+1}}{(2\pi)^{2n+1}}\left\{\frac{\cos(-l\Delta+r)2\pi t}{(-l\Delta+r)^{2n+1}}-\frac{\cos(-l\Delta-r)2\pi t}{(-l\Delta-r)^{2n+1}}\right\}.$$

Mit ihrer Hilfe läßt sich die Gleichung aufstellen:

$$\sum_{r=1}^{-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left\{B''_{2n}(\Delta t,\ u_r)\sin\frac{2r\varrho\pi}{-\Delta}+iB'_{2n+1}(\Delta t,\ u_r)\cos\frac{2r\varrho\pi}{-\Delta}\right\}$$

$$=(-1)^{n}\cdot\frac{4(2n)!\,(-\Delta)^{2n+1}}{(2\pi)^{2n+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\cos 2k\pi\left(\frac{\varrho}{-\Delta}-t\right)}{k^{2n+1}}.$$

Da nun

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\cos 2k\pi\left(\frac{\varrho}{-\Delta}-t\right)}{k^{2n+1}}=(-1)^{n+1}\frac{(2\pi)^{2n+1}}{2\sqrt{-\Delta}}\left\{B(2n+1,\ \Delta)+\varphi\left(\frac{\varrho}{-\Delta}-t,\ 2n+1,\ \Delta\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Gamma(2n+1)}\sum_{r=0}^{s}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(\frac{\varrho-r}{-\Delta}-t\right)^{2n}\right\},$$

so wird der Rest in diesem Falle:

$$P_{2n}=(-\Delta h)^{2n+1}\int_{0}^{\frac{1}{-\Delta}}\sum_{\varrho=0}^{-l\Delta-1}\left\{B(2n+1,\ \Delta)+\varphi\left(\frac{\varrho}{-\Delta}-t,\ 2n+1,\ \Delta\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Gamma(2n+1)}\sum_{r=0}^{s}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(\frac{\varrho-r}{-\Delta}-t\right)^{2n}\right\}f^{(2n+1)}\big(a+\varrho h+(-\Delta h t)\big)\,dt$$

Nehmen wir auch hier die Bezeichnung wieder auf:

$$F_m(t)=B(m,\ \Delta)+\varphi(t,\ m,\ \Delta)+\frac{1}{\Gamma(m)}\sum_{r=0}^{s}\left(\Delta\right)\left(t-\frac{r}{-\Delta}\right)^{m-1},$$

so gewinnen wir die zusammenfassende Darstellung der Reste für negative Diskriminanten:

$$\underline{P_m = (-1)^m(-\Delta h)^{m+1} \int_0^{\frac{1}{-\Delta}} \sum_{\varrho=0}^{-l\Delta-1} F_{m+1}\left(\frac{\varrho}{-\Delta} + (-1)^{m+1} t\right) f^{(m+1)}\left(a + \varrho h + (-\Delta h t)\right) dt.}$$

Fassen wir zum Schlusse auch noch die beiden Restformen für $\Delta \gtrless 0$ zu einer einzigen zusammen, so erhalten wir als Ergebnis:

$$\underline{P_m = \varepsilon(-1)^{m+1}(\varepsilon\Delta h)^{m+1} \int_0^{\frac{1}{\varepsilon\Delta}} \sum_{\varrho=0}^{\varepsilon\Delta l-1} F_{m+1}\left(\frac{\varrho}{\varepsilon\Delta} + (-1)^{m+1} t\right) f^{(m+1)}(a + \varrho h + \varepsilon\Delta h t)\, dt.}$$

Den Schluß dieses Paragraphen möge folgende Bemerkung bilden:

Wir hätten bei der Aufstellung der Summenformel auch verfahren können wie Wicke[16]), der die Krausesche Summenformel von vornherein in ihren reellen und imaginären Bestandteil zerlegt und dadurch zwei neue Gleichungen zur Berechnung von Summen gewinnt von der Form:

$$\sum_{k=0}^{s-1} f(x + kh) \cos 2ku \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{s-1} f(x + kh) \sin 2ku.$$

Die erste dieser Summen hat den Wert $\frac{1}{2}(E''_{2\mu} - P''_{2\mu})$, wobei $P''_{2\mu}$ das Restglied bedeutet und $E''_{2\mu}$ durch die Reihe dargestellt ist:

$$\begin{aligned} E''_{2\mu} = c'' \Bigg[\Bigg(& f(x + sh) + \frac{b_1''}{1!} h f'(x + sh) + \frac{b_3''}{3!} h^3 f'''(x + sh) + \cdots \\ & + \frac{b''_{2\mu-1}}{(2\mu-1)!} h^{2\mu-1} f^{(2\mu-1)}(x + sh) \Bigg) \cos 2su \\ & - \left(f(x) + \frac{b_1''}{1!} h f'(x) + \frac{b_3''}{3!} h^3 f'''(x) + \cdots + \frac{b''_{2\mu-1}}{(2\mu-1)!} h^{2\mu-1} f^{(2\mu-1)}(x) \right) \Bigg] \\ & + ic' \left[f(x + sh) + \frac{b_2'}{2!} h^2 f''(x+sh) + \cdots + \frac{b'_{2\mu}}{(2\mu)!} h^{2\mu} f^{(2\mu)}(x + sh) \right] \sin 2su. \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet:

$$c' \cdot b'_{2\mu} \quad = 2cb_{2\mu},$$

$$c'' \cdot b''_{2\mu+1} = 2cb_{2\mu+1}.$$

Spezialisieren wir so, daß u gleich einem rationalen Bruche von π, etwa $\frac{r\pi}{\Delta} = u_r$ gesetzt wird und wenden auf beide Seiten das wiederholt erläuterte Verfahren an, so geht die vorgelegte Gleichung sofort in unsere Summenformel über, wenn wir nur s gleich einem beliebigen ganzzahligen Vielfachen von Δ wählen und den Zusammenhang zwischen den Größen c und b_m einerseits und $B(m, \Delta)$ anderseits ins Auge fassen. Während nämlich für $s = l\Delta$ der Faktor $\cos 2su_r$ der Einheit gleich wird, verschwindet $\sin 2su_r$ unter dieser Bedingung. Der Rest $P''_{2\mu}$ nimmt dieselbe Form an, die bereits untersucht worden ist.

Genau so würde sich die zweite der oben genannten Summen verwenden lassen, um aus ihr unsere Summenformel für negative Diskriminanten herzuleiten. Wicke gibt am selben Orte noch andere Formeln von ähnlicher Konstruktion, auf welche aber hier nicht weiter eingegangen werden soll.

§ 3.

Anwendung der Summenformel.

I.

Als erstes Beispiel denken wir uns nach dem Vorgange von Saalschütz[15]) eine ganze rationale Funktion vorgelegt:

$$f(x) = x^p(\varepsilon\Delta - x)^q, \qquad q \geqq p,$$

worin p und q ganze positive Zahlen bedeuten sollen. Die Reihe auf der rechten Seite bricht dann von selbst ab, so daß die Hinzufügung des Restgliedes unnötig wird. Spezialisieren wir noch weiter, indem wir setzen:

$$a = 0, \qquad b = \varepsilon\Delta, \qquad h = 1,$$

so wird das Beispiel zur Aufstellung von Rekursionsformeln führen, mit deren Hilfe die Zahlen $B(m, \Delta)$ sich leichter berechnen lassen.

Unter den vorgenannten Annahmen sind die n. Differentialquotienten der Funktion für mindestens einen der beiden Werte $x = 0$ und $x = \varepsilon\Delta$ nur in den Fällen von Null verschieden, bei welchen n zwischen p und $p + q$ einschließlich der Grenzen liegt, und zwar ist mit Fortlassung der sowohl für $x = 0$, als auch für $x = \varepsilon\Delta$ verschwindenden Glieder:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-p} n!\, (q)_{p+q-n}(\varepsilon\Delta - x)^{p+q-n} + (-1)^q n!\, (p)_{p+q-n}\, x^{p+q-n}$$

und daher weiterhin:

$$f^{(n)}(\varepsilon\Delta) = (-1)^q \quad n!\, (p)_{p+q-n}(\varepsilon\Delta)^{p+q-n},$$

$$f^{(n)}\ (o) \ = (-1)^{n-p} n!\, (q)_{p+q-n}(\varepsilon\Delta)^{p+q-n}.$$

Wählen wir nun Δ positiv, so folgt aus der Summenformel, daß dann n eine ungerade Zahl sein muß, dagegen bei negativer Determinante können nur gerade Werte von n Geltung haben. Demgemäß sollen diese beiden Fälle auch gesondert betrachtet werden.

(1) $\underline{\Delta > 0}$, n ungerade. Dann wird:

$$f^{(n)}(\Delta) - f^{(n)}(o) = n!\, \Delta^{p+q-n}\left\{(-1)^p (q)_{p+q-n} + (-1)^q (p)_{p+q-n}\right\}.$$

Wir unterscheiden je nach der Wahl von p und q folgende vier Einzelfälle:

α) p ungerade, q ungerade, $q \geqq p$.

n erhält die Werte:

$$n = p,\ p+2,\ p+4, \ldots p+q-1.$$

Unsere Summenformel führt also zu folgender Gleichung:

$$\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right) r^p(\Delta - r)^q = B(p+1,\Delta)\Delta^{p+q} p!\{-1-(p)_q\} + B(p+3,\Delta)\Delta^{p+q}(p+2)!\{-(q)_{q-2}-(p)_{q-2}\} + \cdots$$
$$+ B(p+q,\Delta)\Delta^{p+q}(p+q-1)!\,(-q-p),$$

$$-\frac{1}{\Delta^{p+q}}\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right) r^p(\Delta - r)^q = B(p+1,\Delta)p!\,\{1+(p)_q\} + B(p+3,\Delta)(p+2)!\,\{(q)_{q-2}+(p)_{q-2}\} + \cdots$$
$$+ B(p+q,\Delta)(p+q)!$$

β) p ungerade, q gerade, $q > p$.

n erhält die Werte:

$$n = p,\ p+2,\ p+4, \ldots p+q-2,$$

und es entsteht die Gleichung:

$$\frac{1}{\Delta^{p+q}}\sum_{r=1}^{\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right) r^p(\Delta - r)^q = B(p+1,\Delta)p!\,\{(p)_q - 1\} + B(p+3,\Delta)(p+2)!\,\{(p)_{q-2} - (q)_{q-2}\} + \cdots$$
$$+ B(p+q-1,\Delta)(p+q-2)!\,\{(p)_2 - (q)_2\}.$$

γ) p **gerade**, q **ungerade**, $q > p$.

n **erhält die Werte:**

$$n = p+1,\ p+3, \ldots p+q-2,$$

und es folgt die Gleichung:

$$\frac{1}{\Delta^{p+q}} \sum_{r=1}^{\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r^p (\Delta - r)^q = B(p+2, \Delta)(p+1)! \{q - (p)_{q-1}\} + B(p+4, \Delta)(p+3)! \{(q)_{q-3} - (p)_{q-3}\} + \cdots + B(p+q-1, \Delta)(p+q-2)! \{(q)_2 - (p)_2\}.$$

δ) p gerade, q gerade, $q \geqq p$.

n erhält die Werte:

$$n = p+1,\ p+3, \ldots p+q-1.$$

Wir erhalten die Gleichung:

$$\frac{1}{\Delta^{p+q}} \sum_{r=1}^{\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r^p (\Delta - r)^q = B(p+2, \Delta)(p+1)! \{q + (p)_{q-1}\} + B(p+4, \Delta)(p+3)! \{(q)_{q-3} + (p)_{q-3}\} + \cdots + B(p+q, \Delta)(p+q)!$$

Um nun für numerische Rechnungen günstige Resultate, also solche Gleichungen zu erhalten, in denen möglichst wenig Bernoullische Zahlen vorkommen, setzen wir in α) und δ) $p = q$ und gewinnen dadurch die Formeln:

$$-\frac{1}{2 \cdot \Delta^{2p}} \sum_{r=1}^{\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r^p (\Delta - r)^p = B(p+1, \Delta) p! + B(p+3, \Delta)(p+2)! (p)_{p-2} + \cdots + B(2p, \Delta)(2p-1)! \, p, \qquad p = 2m+1;$$

$$\frac{1}{2 \cdot \Delta^{2p}} \sum_{r=1}^{\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r^p (\Delta - r)^p = B(p+2, \Delta)(p+1)! \, p + B(p+4, \Delta)(p+3)! (p)_{p-3} + \cdots + B(2p, \Delta)(2p-1)! \, p, \qquad p = 2m.$$

Beachten wir noch, daß für $\Delta > 0$:

$$\left(\frac{\Delta}{r}\right) = \left(\frac{\Delta}{\Delta - r}\right),$$

so finden wir den folgenden **Satz:**

Bei positiver Diskriminante Δ leisten die entsprechenden Bernoullischen Zahlen den Gleichungen Genüge:

$$-\frac{1}{\Delta^{2p}} \sum_{r=1}^{E\left(\frac{\Delta}{2}\right)} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r^p (\Delta - r)^p = \sum_{\mu=0}^{\frac{p-1}{2}} B(p+2\mu+1, \Delta)(p+2\mu)! (p)_{p-2\mu}, \qquad p = 2m+1,$$

$$\frac{1}{\Delta^{2p}} \sum_{r=1}^{E\left(\frac{\Delta}{2}\right)} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r^p (\Delta - r)^p = \sum_{\mu=1}^{\frac{p}{2}} B(p+2\mu, \Delta)(p+2\mu-1)! (p)_{p-2\mu+1}, \qquad p = 2m.$$

(2) $\Delta < 0$, n gerade. Dann wird:

$$f^{(n)}(\Delta) - f^{(n)}(o) = n! (-\Delta)^{p+q-n} \{(-1)^q (p)_{p+q-n} - (-1)^p (q)_{p+q-n}\}.$$

Wir unterscheiden dieselben vier Einzelfälle und finden die Resultate:

α) p ungerade, q ungerade, $q \geqq p$.

$$n = p+1,\ p+3, \ldots p+q-2.$$

$$\frac{1}{(-\Delta)^{p+q}} \sum_{r=1}^{-\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r^p (-\Delta - r)^q$$

$$= B(p+2, \Delta)(p+1)! \{(q)_{q-1} - (p)_{q-1}\} + B(p+4, \Delta)(p+3)! \{(q)_{q-3} - (p)_{q-3}\} + \cdots + B(p+q-1, \Delta)(p+q-2)! \{(q)_2 - (p)_2\}.$$

β) p **ungerade**, q **gerade**, $q > p$.

$$n = p + 1,\ p + 3,\ \ldots\ p + q - 1.$$

$$\frac{1}{(-\Delta)^{p+q}} \sum_{r=1}^{-\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r^p (-\Delta - r)^q$$
$$= B(p + 2, \Delta)(p + 1)!\,\{(p)_{q-1} + (q)_{q-1}\} + B(p + 4, \Delta)(p + 3)!\,\{(p)_{q-3} + (q)_{q-3}\} + \cdots$$
$$+ B(p + q, \Delta)(p + q)!$$

γ) p gerade, q ungerade, $q > p$.

$$n = p,\ p + 2,\ p + 4,\ \ldots\ p + q - 1.$$

$$-\frac{1}{(-\Delta)^{p+q}} \sum_{r=1}^{-\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r^p (-\Delta - r)^q = B(p+1, \Delta)\,p!\,\{(p)_q + 1\} + B(p+3, \Delta)(p+2)!\,\{(p)_{q-2} + (q)_{q-2}\} + \cdots$$
$$+ B(p + q, \Delta)(p + q)!$$

δ) p gerade, q gerade, $q \geq p$.

$$n = p,\ p + 2,\ p + 4,\ \ldots\ p + q - 2.$$

$$\frac{1}{(-\Delta)^{p+q}} \sum_{r=1}^{-\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r^p (-\Delta - r)^q = B(p+1, \Delta)\,p!\,\{(p)_q - 1\} + B(p + 3, \Delta)(p + 2)!\,\{(p)_{q-2} - (q)_{q-2}\} + \cdots$$
$$+ B(p + q - 1, \Delta)(p + q - 2)!\,\{(p)_2 - (q)_2\}.$$

Hier lassen sich nicht, wie bei positiver Diskriminante, verkürzte Rekursionsformeln dadurch herstellen, daß man in den Gleichungen α) und δ) $p = q$ setzt; denn in diesem Falle würden beide Seiten verschwinden. Wir können uns aber auch so helfen, daß wir in β) und γ) $q = p + 1$ setzen, ohne daß dabei die Formeln selbst eine wesentlich einfachere Darstellung erfahren. Wir begnügen uns darum mit dem **Satz:**

Bei negativer Diskriminante Δ leisten die entsprechenden Bernoullischen Zahlen den unter α) bis δ) angegebenen Gleichungen Genüge.

Welche für ihre praktische Verwendung brauchbaren Werte diese Bernoullischen Zahlen annehmen, möge an je einem Beispiele gezeigt werden:

(1) $\Delta = 5$: $B(2, 5) = \frac{2}{5^2}$; $B(4, 5) = -\frac{2}{3!\,5^3}$; $B(6, 5) = \frac{134}{5!\,5^6}$; $B(8, 5) = -\frac{722}{7!\,5^7}$;
$B(10, 5) = \frac{825\,502}{9!\,5^{11}}$; $B(12, 5) = -\frac{2\,301\,842}{11!\,5^{11}}$; $B(14, 5) = \frac{1\,137\,183\,686}{13!\,5^{14}}$; $B(16, 5) = -\frac{29\,246\,849\,362}{15!\,5^{15}}$.

(2) $\Delta = -7$: $B(1, -7) = -1$; $B(3, -7) = \frac{8}{7^3}$; $B(5, -7) = -\frac{8}{3!\,7^4}$; $B(7, -7) = \frac{1168}{6!\,7^6}$;
$B(9, -7) = -\frac{565\,184}{8!\,7^9}$; $B(11, -7) = \frac{63\,045\,136}{10!\,7^{11}}$; $B(13, -7) = -\frac{135\,190\,964\,272}{13!\,7^{13}}$;
$B(15, -7) = \frac{2\,354\,223\,379\,776}{14!\,7^{15}}$.

II.

Als zweites Beispiel soll die Dirichletsche Reihe:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}$$

für gegebene Determinanten summiert und mit ihrer Hilfe auch die Klassenanzahl der zu diesen Determinanten gehörenden quadratischen Formen bestimmt werden. Da die Werte dieser Reihe für negative Determinanten sich anderweitig leicht ermitteln lassen, wollen wir uns hier nur auf den Fall von positiven Determinanten beschränken.

Das Symbol $\left(\frac{D}{n}\right)$ ist nun das Jacobische Symbol, welches stets der Null gleich wird, sobald n und $2D$ nicht relativ prim zueinander sind. Das Kroneckersche Symbol $\left(\frac{\Delta}{r}\right)$, das in der vorliegenden

Arbeit Verwendung gefunden, kennt diese Einschränkung nicht. Während nämlich alle geradzahligen Werte von n das erstere Symbol zum Verschwinden bringen, gilt, wie bereits an anderer Stelle erwähnt, für das zweite die Gleichung:

$$\left(\frac{a}{2^\beta . b}\right) = \left(\frac{2^\beta}{a}\right)\left(\frac{a}{b}\right).$$

Um deshalb auf die Dirichletschen Reihen unsere Summenformel anwenden zu können, müssen wir sie entsprechend transformieren. Wir finden, indem wir die Summen mit geraden und ungeraden Werten von r voneinander trennen:

$$\sum_{r=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{1}{r} = \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{1}{r} - \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{2r}\right)\frac{1}{2r},$$

wobei nunmehr die Summe links nur über ungerade Werte von r zu erstrecken ist. Die rechte Seite läßt sich leicht auf folgende Form bringen:

$$\left(1 - \left(\frac{\Delta}{2}\right)\frac{1}{2}\right)\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{1}{r}.$$

Wir brauchen also nur den durch die Summenformel gegebenen Wert der Reihe $\sum\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{1}{r}$ mit dem Faktor $\left(1 - \left(\frac{\Delta}{2}\right)\frac{1}{2}\right)$ zu multiplizieren, um sofort auch den Wert der Dirichletschen Reihe zu kennen. Um die Genauigkeit der Rechnung nach Möglichkeit zu erhöhen, wollen wir stets die ersten Glieder der vorgelegten Summen für sich berechnen und die Formel nur zur Summierung der übrigen benützen. Die Anzahl dieser getrennt zu behandelnden Glieder ist beliebig, doch muß sie immer ein Vielfaches von Δ sein.

Da für die Bestimmung der Klassenanzahl als Resultate nur ganze Zahlen in Betracht kommen können, brauchen wir in der Auswertung der vorgelegten Reihen auch nicht allzuweit zu gehen. Gerade darin liegt der Vorzug dieser Methode, daß sie, freilich abgesehen von der Ermittlung der Zahlen $B(m, \Delta)$, mit wenig Rechnung zum Ziele führt.

(1) $\underline{\Delta = 5}$. Dann wird:

$$S = \left(1 - \left(\frac{5}{2}\right)\frac{1}{2}\right)\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{5}{r}\right)\frac{1}{r} = \frac{3}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{5}{r}\right)\frac{1}{r}.$$

Setzen wir in der Summenformel $h = 1$, $a = 10$, berechnen also die ersten zehn Glieder für sich, so erhalten wir:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{5}{r}\right)\frac{1}{10+r} = B(2, 5)\frac{5}{10^2} + B(4, 5)\frac{5^3 . 3!}{10^4} + \cdots$$

Da nun

$$B(2, 5) = \frac{2}{25}, \quad B(4, 5) = -\frac{2}{3!\, 5^3},$$

so finden wir:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{5}{r}\right)\cdot\frac{1}{10+r} = \frac{2}{500} - \frac{2}{10000} \pm \cdots = 0{,}0038.$$

Ferner ist:

$$\sum_{r=1}^{9}\left(\frac{5}{r}\right)\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = 0{,}4266\ \ldots,$$

so daß sich das Resultat ergibt:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{5}{r}\right)\frac{1}{r} = 0{,}4266 + 0{,}0038 = \underline{0{,}4304}.$$

Nun haben die Differentialquotienten von $f(x) = \frac{1}{x}$ die Form:

$$f^{(2n)}(x) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}}; \quad f^{(2n+2)}(x) = \frac{(2n+2)!}{x^{2n+3}}.$$

Beide ändern ihr Zeichen nicht, während x von a bis ∞ wächst, infolgedessen behalten auch $U_{2n}^{(r)}(t)$ und $U_{2n+2}^{(r)}(t)$ ihre Zeichen bei, während t von 0 bis 1 geht. Wir sind also berechtigt, dem Restgliede folgende Form zu geben:

$$P = B(6, 5)\frac{5^5 . 5!}{(10+\vartheta)^6} - B_3 \frac{5^6}{6!}\sum_{r=1}^{4}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\theta^{(r)}\frac{5!}{(10+r)^6};\qquad B(6, 5) = \frac{134}{5!\, 5^6},\ B_3 = \frac{1}{42}.$$

Hieraus folgt, daß P der Ungleichung genügen wird:

$$P < \frac{134}{5 . 10^6}.$$

Also muß sein:

$$\underline{P < 0{,}000027.}$$

Demnach sind bei Verwendung zweier Glieder bereits vier Stellen genau angegeben, der Fehler tritt erst in der fünften ein.

Berechnet man die ersten 20 Glieder getrennt und nimmt vier Glieder der Summenformel, so erhält man als Wert:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{5}{r}\right)\frac{1}{r} = 0{,}4304091,$$

$$P < 0{,}0000000033.$$

Der gesuchte Wert S der Dirichletschen Reihe wird hiernach:

$$\underline{S = 0{,}6456136.}$$

Zum Vergleiche möge hier die Berechnung von S auch nach den Dirichletschen Methoden selbst erfolgen:

(a)
$$S = -\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{2}{5}\right)\sum_{r=1}^{4}(-1)^r\left(\frac{r}{5}\right)\log\operatorname{tang}\frac{r\pi}{10},$$

$$S = \frac{1}{2\sqrt{5}}(-\log\operatorname{tang} 18^0 - \log\operatorname{tang} 36^0 + \log\operatorname{tang} 54^0 + \log\operatorname{tang} 72^0),$$

$$S = \frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot 2{,}88727,$$

$$\log S = 0{,}8099722 - 1;\qquad S = \underline{0{,}645613.}$$

(b)
$$S = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)\right\}\sum_{h=0}^{4}\left(\frac{h}{5}\right)\log\sin\frac{h\pi}{5},$$

$$S = \frac{3}{\sqrt{5}}(\log\sin 72^0 - \log\sin 36^0),$$

$$S = \frac{3}{\sqrt{5}}\cdot 0{,}48121173,$$

$$\log S = 9{,}8099725 - 10;\qquad S = \underline{0{,}645613.}$$

Die Umständlichkeit der Rechnung liegt in beiden Fällen in der Bestimmung der natürlichen Logarithmen.

Die Klassenanzahl der quadratischen Formen mit der Determinante 5 ist nun nach Dirichlet durch den Ausdruck bestimmt:

$$H(5) = \frac{2\sqrt{5}}{\log(T+U\sqrt{5})}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{5}{r}\right)\frac{1}{r}.$$

Für $D = 5$ wird $T = 9$ und $U = 4$; durch Einsetzen erhalten wir somit:

$$H(5) = \frac{2\sqrt{5} . 0{,}6456}{\log(9+4\sqrt{5})} = \frac{4{,}47214 . 0{,}6456}{\log 17{,}94428},$$

$$H(5) = \frac{4{,}47214 . 0{,}6456}{2{,}8872715} = \underline{0{,}99998.}$$

Das Formensystem der Determinante 5 besteht also aus einer einzigen Form.

(2) $\Delta = 12$. Dann wird:

$$S = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{12}{r}\right) \frac{1}{r}.$$

Unsere Formel liefert für $a = 12$, $h = 1$:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{12}{r}\right) \frac{1}{12+r} = B(2, 12) \frac{12}{12^2} + B(4, 12) \frac{12^3 . 3!}{12^4} + \cdots$$

Da nun:

$$B(2, 12) = \frac{1}{6}, \quad B(4, 12) = -\frac{46}{3!\, 12^3}, \quad B(6, 12) = \frac{3362}{5!\, 12^5},$$

so ergibt sich:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{12}{r}\right) \frac{1}{12+r} = \frac{1}{72} - \frac{23}{10368} \pm \cdots = 0{,}0117.$$

Ferner ist:

$$\sum_{r=1}^{11} \left(\frac{12}{r}\right) \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} = 0{,}7480.$$

Also wird:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{12}{r}\right) \frac{1}{r} = 0{,}7480 + 0{,}0117 = \underline{0{,}7597},$$

$$\underline{P < 0{,}00113.}$$

Für $D = 12$ ist $T = 7$ und $U = 2$, so daß wir für die Klassenanzahl erhalten:

$$H(12) = \frac{2\sqrt{12} . 0{,}7597}{\log(7 + 2\sqrt{12})} = \frac{6{,}92820 . 0{,}7597}{\log 13{,}92820},$$

$$H(12) = \frac{6{,}92820 . 0{,}7597}{2{,}633916} = \underline{1{,}9983.}$$

Demnach ist die Klassenanzahl der zur Determinante 12 gehörenden Formen gleich 2.

(3) $\Delta = 21$. Dann wird:

$$S = \frac{3}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{21}{r}\right) \frac{1}{r}.$$

Wir erhalten für $a = 21$, $h = 1$:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{21}{r}\right) \frac{1}{21+r} = B(2, 21) \frac{21}{21^2} + B(4, 21) \frac{21^3 . 3!}{21^4} + \cdots$$

Es ist nun:

$$B(2, 21) = \frac{4}{21}, \quad B(4, 21) = -\frac{308}{3!\, 21^3}, \quad B(6, 21) = \frac{71884}{5!\, 21^5},$$

also erhalten wir:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{21}{r}\right) \frac{1}{21+r} = \frac{4}{441} - \frac{308}{194481} \pm \cdots = 0{,}00749.$$

Da weiterhin:

$$\sum_{r=1}^{20} \left(\frac{21}{r}\right) \frac{1}{r} = 0{,}67586,$$

so erhalten wir als Ergebnis:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{21}{r}\right) \frac{1}{r} = 0{,}67586 + 0{,}00749 = \underline{0{,}68335},$$

$$\underline{P < 0{,}00084.}$$

Hieraus ergibt sich für S selbst der Wert:

$$\underline{S = 1{,}02503.}$$

Für $D = 21$ ist $T = 55$, $U = 12$, so daß für die Klassenanzahl folgt:

$$H(21) = \frac{2\sqrt{21}\,.\,1{,}02503}{\log(55 + 12\sqrt{21})} = \frac{9{,}16516\,.\,1{,}02503}{\log 109{,}99096} = \frac{9{,}16516\,.\,1{,}02503}{4{,}700398},$$

$$\underline{H(21) = 1{,}99862.}$$

Also ist die Anzahl der Klassen der zur Determinante 21 gehörenden Formen gleich 2.

III.

Vorgelegt sei die Funktion:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

dann ist die Summe zu bilden:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \frac{\sin(a + rh)}{a + rh},$$

und zwar für Werte von h, bei welchen sie konvergiert. Die vorgelegte Summe zerlegen wir durch geeignete Zusammenfassung einzelner Glieder in Teilsummen und erhalten:

$$\sum_{r=1}^{\varepsilon\Delta - 1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{\sin(a + rh + \varrho\varepsilon\Delta h)}{a + rh + \varrho\varepsilon\Delta h}.$$

Dieser Ausdruck wird nur dann eine konvergente Reihe darstellen, wenn die von ϱ abhängigen Teilsummen bei festgehaltenem r konvergieren. Wir untersuchen deshalb nur eine derselben und setzen:

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{\sin(a + sh + \varrho\varepsilon\Delta h)}{a + sh + \varrho\varepsilon\Delta h} = \frac{\sin(a + sh)}{a + sh} + \sin(a + sh) \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{\cos\varrho\varepsilon\Delta h}{a + sh + \varrho\varepsilon\Delta h} + \cos(a + sh) \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{\sin\varrho\varepsilon\Delta h}{a + sh + \varrho\varepsilon\Delta h}.$$

Nach bekannten Regeln konvergieren die Reihen:

$$\sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{\sin\varrho h}{a + sh + \varrho h} \quad \text{und} \quad \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{\cos\varrho h}{a + sh + \varrho h}$$

für $0 < h < 2\pi$, also unsere entsprechenden Reihen für $0 < h < \frac{2\pi}{\varepsilon\Delta}$. Für diese Werte von h ist also auch die Reihe:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \frac{\sin(a + rh)}{a + rh}$$

konvergent; das Resultat bleibt bestehen für $a = 0$.

Bei der Summierung der unendlichen Reihe unterscheiden wir wieder die beiden Fälle $\Delta \quad 0$.

(1) $\underline{\Delta > 0.}$ Dann ist:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \frac{\sin(a + rh)}{a + rh} = B(2, \Delta)\Delta h\{f'(\infty) - f'(a)\} + B(4, \Delta)(\Delta h)^3\{f'''(\infty) - f'''(a)\} + \cdots$$

Es soll jetzt auch die rechte Seite auf ihre Konvergenz untersucht werden; denn in diesem Falle sind wir berechtigt, das Restglied fortzulassen. Das allgemeine, von $x = \infty$ abhängige Glied kann geschrieben werden:

$$B(2n, \Delta)(\Delta h)^{2n-1} f^{(2n-1)}(x) = (\Delta h)^{2n-1}(-1)^{n-1} \frac{2\sqrt{\Delta}}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{k^{2n}} \left[D_x^{(2n-1)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right]_{x=\infty}.$$

Wir schließen nun genau wie Saalschütz[15]), der nachweist, daß der Ausdruck in den eckigen Klammern für $x = \infty$ in jedem Falle gleich Null wird. Dabei ist es gleichgültig, ob n endlich bleibt oder sich selbst unabhängig von x der Unendlichkeit nähert. Ferner ist:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{k^{2n}} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left\{\frac{1}{r^{2n}} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(l\Delta + r)^{2n}} + \frac{1}{(l\Delta - r)^{2n}}\right)\right\} = 1.$$

Demnach werden alle Glieder:

$$B(2n,\ \Delta)(\Delta h)^{2n-1} f^{(2n-1)}(\infty)$$

verschwinden, wenn auch der Faktor $\frac{(\Delta h)^{2n-1}}{(2\pi)^{2n}}$ sich mit wachsenden Werten von n der Null nähert oder doch endlich bleibt, d. h. aber sicherlich für:

$$0 \leq h < \frac{2\pi}{\Delta}.$$

Unter dieser Bedingung wird also die Reihe der von $x=\infty$ abhängenden Glieder stets verschwinden, so daß nur die Reihe der Glieder mit a übrigbleibt, denen wir analog Saalschütz die Form geben wollen:

$$B(2n,\Delta)(\Delta h)^{2n-1}\cdot\frac{(-1)^n}{2n}\left\{\vartheta\sin a - \frac{\vartheta'.a.\cos a}{2n+1}\right\},\qquad 0<\begin{Bmatrix}\vartheta\\ \vartheta'\end{Bmatrix}<1,\quad a\leqq 2n.$$

Bezeichnen wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{1}{k^{2n}} = S_{2n},$$

so läßt sich unsere Reihe nunmehr in der Form schreiben:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{\sin(a+rh)}{a+rh} = \sqrt{\Delta}\sin a\left\{\frac{\vartheta_1}{1}\frac{\Delta h}{(2\pi)^2}S_2 + \frac{\vartheta_2}{2}\frac{(\Delta h)^3}{(2\pi)^4}S_4 + \frac{\vartheta_3}{3}\frac{(\Delta h)^5}{(2\pi)^6}S_6 + \cdots\right\}$$
$$- a\sqrt{\Delta}\cos a\left\{\frac{\vartheta_1'}{1.3}\frac{\Delta h}{(2\pi)^2}S_2 + \frac{\vartheta_2'}{2.5}\frac{(\Delta h)^3}{(2\pi)^4}S_4 + \frac{\vartheta_3'}{3.7}\frac{(\Delta h)^5}{(2\pi)^6}S_6 + \cdots\right\},$$

wobei die Größen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots \vartheta_1', \vartheta_2', \vartheta_3', \ldots$ lauter positive echte Brüche bedeuten und die Größe $a<2$ gewählt werden muß. Für die angegebenen Werte von h konvergieren die Reihen in den Klammern. Setzen wir noch $a=0$, so verschwindet die rechte Seite der Gleichung völlig, und wir gelangen zu dem Resultat:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{\sin rh}{r} = 0,\qquad 0\leq h<\frac{2\pi}{\Delta}.$$

Da die Sinusfunktion eine ungerade Funktion ist, so bleibt die Gleichung bestehen, wenn wir $-h$ an Stelle von h setzen; substituieren wir noch $2\pi z$ für h, so erhalten wir für:

$$-\frac{1}{\Delta} < z < \frac{1}{\Delta}$$

in Übereinstimmung mit Berger die Gleichung:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{\sin 2r\pi z}{r} = 0.$$

(2) $\Delta < 0.$ Wir erhalten die Darstellung:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{\sin(a+rh)}{a+rh} = B(1,\Delta)\{f(\infty)-f(a)\} + B(3,\Delta)(-\Delta h)^2\{f''(\infty)-f''(a)\}+\cdots$$

Das allgemeine Glied der von $b=\infty$ abhängigen Reihe lautet:

$$B(2n+1,\Delta)(-\Delta h)^{2n} f^{(2n)}(b) = (-1)^{n+1}\frac{2\sqrt{-\Delta}\,(-\Delta h)^{2n}}{(2\pi)^{2n+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{1}{k^{2n+1}}\left[D_x^{(2n)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right]_{x=b=\infty}.$$

Wir bilden den $2n$. Differentialquotienten auf doppelte Weise und finden zunächst nach der Regel von der Differentiation eines Produktes:

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n\left[\frac{\sin x}{x}\left\{1-\frac{2n\cdot 2n-1}{x^2}+\frac{2n\cdots 2n-3}{x^4}\mp\cdots\right\}+\frac{\cos x}{x}\left\{\frac{2n}{x}-\frac{2n\cdots 2n-2}{x^3}+\frac{2n\cdots 2n-4}{x^5}\mp\cdots\right\}\right].$$

Hieraus geht hervor, daß für $x>2n$ und $x=\infty$ alle diese Glieder verschwinden müssen.

Ferner finden wir aus der Reihenentwicklung der Sinusfunktion:

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \left\{ \frac{1}{2n+1} - \frac{x^2}{2!(2n+3)} + \frac{x^4}{4!(2n+5)} \mp \cdots \right\}.$$

Verfahren wir hier ähnlich wie **Saalschütz**, indem wir nacheinander gewisse Reihen absondern, so erhalten wir:

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \frac{1}{2n+1} \left\{ \cos x + \frac{x}{2n+2} \left[\sin x - \frac{x}{2n+3} \left(\cos x + \frac{x}{2n+4} \{ \sin x - \cdots \} \right) \right] \right\}.$$

Hierfür kann abgekürzt geschrieben werden:

$$D_x^{(2n)} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = (-1)^n \frac{1}{2n+1} \left\{ \vartheta \cos x + \frac{\vartheta' x \sin x}{2n+2} \right\}, \qquad x \leqq 2n,$$

wobei ϑ und ϑ' positive echte Brüche sind und die Reihen darstellen:

$$\vartheta = 1 - \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} + \frac{x^4}{(2n+2)\cdots(2n+5)} \mp \cdots$$

$$\vartheta' = 1 - \frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)} + \frac{x^4}{(2n+3)\cdots(2n+6)} \mp \cdots$$

Aus dieser Form folgt das Resultat, daß die Differentialquotienten unserer Funktion auch für alle Werte $x \leqq 2n$ und $x = \infty$ verschwinden müssen. Damit ist der Beweis erbracht, daß die Reihe der mit $b = \infty$ gebildeten Größen vollkommen unabhängig von n in jedem Falle der Null gleich werden muß, wenn für die gleichzeitig auftretenden Faktoren dieselben Bedingungen gelten wie beim vorigen Beispiel, d. h. aber, wenn h den Ungleichungen genügt:

$$0 < h < \frac{2\pi}{-\varDelta}.$$

Demzufolge bedürfen wir nur noch der mit $x = a$ zusammenhängenden Glieder, und unsere Summe nimmt, wenn wir auch hier die Bezeichnung einführen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varDelta}{k} \right) \frac{1}{k^{2n-1}} = S_{2n-1},$$

die Form an:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\varDelta}{r} \right) \frac{\sin(a+rh)}{a+rh} = -B(1,\varDelta) \frac{\sin a}{a} - 2\sqrt{-\varDelta} \cos a \left\{ \frac{\vartheta_1}{3} \frac{(-\varDelta h)^3}{(2\pi)^3} S_3 + \frac{\vartheta_2}{5} \frac{(-\varDelta h)^5}{(2\pi)^5} S_5 + \cdots \right\}$$

$$- a\sqrt{-\varDelta} \sin a \left\{ \frac{\vartheta'_1}{3 \cdot 2} \frac{(-\varDelta h)^3}{(2\pi)^3} S_3 + \frac{\vartheta'_2}{5 \cdot 3} \frac{(-\varDelta h)^5}{(2\pi)^5} S_5 + \frac{\vartheta'_3}{7 \cdot 4} \frac{(-\varDelta h)^7}{(2\pi)^7} S_7 + \cdots \right\}.$$

Es gelten dieselben Schlußfolgerungen wie vorhin; unsere Reihe besitzt auch für negative $\varDelta$ einen endlichen Wert, der aber diesmal für $a = 0$ nicht selbst der Null gleich wird, sondern in der Form geschrieben werden kann:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\varDelta}{r} \right) \frac{\sin rh}{rh} = -B(1,\varDelta) - B(3,\varDelta)(-\varDelta h)^2 f''(0) - B(5,\varDelta)(-\varDelta h)^4 f^{(4)}(0) - \cdots$$

Da nun:

$$f''(0) = -\frac{1}{3}, \quad f^{(4)}(0) = \frac{1}{5}, \quad f^{(6)}(0) = -\frac{1}{7}, \ \cdots$$

so ist:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\varDelta}{r} \right) \frac{\sin rh}{r} = h \left[-B(1,\varDelta) + B(3,\varDelta) \frac{(-\varDelta h)^2}{3} - B(5,\varDelta) \frac{(-\varDelta h)^4}{5} \pm \cdots \right].$$

Indem wir auch hierin $h = 2\pi z$ setzen, gibt uns also unsere Summenformel ein Mittel, den Wert dieser transzendenten Funktion für negative $\varDelta$ in allen den Fällen zu berechnen, in denen z den Ungleichungen genügt:

$$-\frac{1}{-\varDelta} < z < \frac{1}{-\varDelta}.$$

Es ist:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{\sin 2r\pi z}{r} = 2\pi z\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(-\Delta h)^{2k-2}}{2k-1}B(2k-1,\Delta).$$

Zahlenbeispiel: $\Delta = -7,\quad h = \frac{\pi}{7};\quad \left(z = \frac{1}{14}\right)$.

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{-7}{r}\right)\frac{\sin\frac{r\pi}{7}}{r} = \frac{\pi}{7}\left[-B(1,-7)+B(3,-7)\frac{\pi^2}{3}-B(5,-7)\frac{\pi^4}{5}+B(7,-7)\frac{\pi^6}{7}-B(9,-7)\frac{\pi^8}{9}\pm\cdots\right]$$

$B(1,-7) = -1,\quad B(3,-7) = \frac{8}{7^3},\quad B(5,-7) = -\frac{8}{3!\,7^4},\quad B(7,-7) = \frac{1168}{6!\,7^6},\quad B(9,-7) = -\frac{565184}{8!\,7^9}$.

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{-7}{r}\right)\frac{\sin\frac{r\pi}{7}}{r} &= \frac{\pi}{7}\left[1+\frac{8\pi^2}{3\cdot 7^3}+\frac{8\pi^4}{3!\,5\cdot 7^4}+\frac{1168\pi^6}{7!\,7^6}+\frac{565184\pi^8}{9!\,7^9}+\cdots\right]\\ &= \frac{\pi}{7}\left[1+0{,}0767+0{,}0108+0{,}0012+0{,}0004+\cdots\right]\\ &= \frac{\pi}{7}\cdot 1{,}0891.\end{aligned}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{-7}{r}\right)\frac{\sin\frac{r\pi}{7}}{r} = 0{,}4888.$$

Verallgemeinern wir nunmehr die vorgelegte Funktion, indem wir statt ihrer die folgende wählen:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^s},$$

wobei s eine positive ganze Zahl bedeutet, so konvergiert die zu summierende Reihe:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{\sin(a+rh)}{(a+rh)^s}$$

für alle Werte von h, die den Ungleichungen Genüge leisten:

$$0 < h \leq \frac{2\pi}{\varepsilon\Delta}.$$

Wir unterscheiden wieder dieselben zwei Fälle $\Delta \gtrless 0$.

(1) $\Delta > 0$; a) $s = 2m+1,\quad m \geq 0$.

Um die Konvergenz der rechten Seite der Summenformel auch für $a = 0$ aufrechterhalten zu können, bedürfen wir statt der vorgelegten Funktion $f(x)$ einer Hilfsfunktion $f_1(x)$ von der Form:

$$f_1(x) = \frac{\sin x}{x^{2m+1}} - \frac{1}{x^{2m}} + \frac{1}{3!\,x^{2m-2}} \mp \cdots + (-1)^m\frac{1}{(2m-1)!\,x^2}.$$

Wir gewinnen aus ihr zunächst die Darstellung:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{r}\right)f_1(a+rh) = B(2,\Delta)\,\Delta h\{f_1'(\infty)-f_1'(a)\} + B(4,\Delta)(\Delta h)^3\{f_1'''(\infty)-f_1'''(a)\}+\cdots$$

Ganz analog den vorhergehenden Untersuchungen ergibt sich die Konvergenz der Reihe rechts für:

$$0 \leq h < \frac{2\pi}{\Delta};$$

insbesondere werden für $x = \infty$ auch hier alle von $x = b$ abhängigen Glieder gleich Null, während sich die Differentialquotienten von $f_1(a)$ folgendermaßen schreiben lassen:

$$f_1^{(2n-1)}(a) = (-1)^{m+n}\frac{(2n-1)!}{(2n+2m)!}\left\{\vartheta\sin a - \frac{(2m+1)\vartheta'\cdot a\cdot\cos a}{2n+2m+1}\right\},\qquad 0 < \left|\begin{matrix}\vartheta\\ \vartheta'\end{matrix}\right| < 1.$$

Diese Darstellung läßt erkennen, daß für $a = 0$ die von a abhängige Reihe ebenfalls verschwindet und wir mithin das Resultat gewinnen:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\varDelta}{r}\right) \left\{ \frac{\sin rh}{(rh)^{2m+1}} - \frac{1}{(rh)^{2m}} + \frac{1}{3!\,(rh)^{2m-2}} \mp \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m-1)!\,(rh)^2} \right\} = 0.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit:

$$\frac{2(-1)^{m+1}\sqrt{\varDelta}\,h^{2m+1}}{(2\pi)^{2m+1}}$$

und setzen $h = 2\pi z$, so erhalten wir für:

$$-\frac{1}{\varDelta} \leqq z \leqq \frac{1}{\varDelta}$$

$$\frac{2(-1)^{m+1}\sqrt{\varDelta}}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\varDelta}{r}\right) \left\{ \frac{\sin 2r\pi z}{r^{2m+1}} - \frac{2\pi z}{r^{2m}} + \frac{(2\pi z)^3}{3!\,r^{2m-2}} \mp \cdots + (-1)^m \frac{(2\pi z)^{2m-1}}{(2m-1)!\,r^2} \right\} = 0.$$

Da nun aber:

$$B(2m, \varDelta) = \frac{2(-1)^{m+1}\sqrt{\varDelta}}{(2\pi)^{2m}} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\varDelta}{r}\right) \frac{1}{r^{2m}}$$

und

$$\varphi(z, m, \varDelta) = \sum_{k=1}^{m} \frac{B(m-k, \varDelta)}{k!} z^k, \qquad m \geqq 1,$$

so erhalten wir die bekannte Beziehung:

$$\frac{2(-1)^{m+1}\sqrt{\varDelta}}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\varDelta}{r}\right) \frac{\sin 2r\pi z}{r^{2m+1}} = \varphi(z, 2m+1, \varDelta). \qquad m \geqq 1,$$

(b) $s = 2m, \quad m \geqq 1.$

Um den Wert $a = 0$ mit einschließen zu können, wählen wir die Hilfsfunktion:

$$f_1(x) = \frac{\sin x}{x^{2m}} - \frac{1}{x^{2m-1}} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{x^{2m-3}} \mp \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m-1)!} \cdot \frac{1}{x}.$$

Durch Anwendung der Summenformel erhalten wir die Gleichung:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\varDelta}{r}\right) f_1(a + rh) = B(2, \varDelta)\, \varDelta h \{f_1'(\infty) - f_1'(a)\} + B(4, \varDelta)\, (\varDelta h)^3 \{f_1'''(\infty) - f_1'''(a)\} + \cdots$$

Die Reihen auf beiden Seiten konvergieren für $0 < h \leqq \frac{2\pi}{\varDelta}$, die Reihe rechts auch noch für $h = 0$. Die Glieder der von $b = \infty$ abhängenden Reihe besitzen sämtlich den Wert 0, weil die entsprechenden Differentialquotienten verschwinden. Hingegen läßt die dem Ausdruck $f_1^{(2n-1)}(a)$ gegebene Form:

$$f_1^{(2n-1)}(a) = (-1)^{m+n-1} \frac{(2n-1)!}{(2m+2n-1)!} \left\{ \vartheta \cdot \cos \alpha + \frac{2m\vartheta' \alpha \sin \alpha}{2m+2n} \right\} \qquad 0 < \left\{ \begin{matrix} \vartheta \\ \vartheta' \end{matrix} \right\} < 1$$

erkennen, daß die noch übrige zweite Reihe der rechten Seite für $a = 0$ einen endlichen, aber von 0 verschiedenen Wert erhält. Wir finden also für $a = 0$:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\varDelta}{r}\right) \left\{ \frac{\sin rh}{(rh)^{2m}} - \frac{1}{(rh)^{2m-1}} + \frac{1}{3!} \frac{1}{(rh)^{2m-3}} \mp \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m-1)!} \frac{1}{rh} \right\}$$
$$= (-1)^{m+1} \left[B(2, \varDelta) \frac{\varDelta h}{(2m+1)!} - B(4, \varDelta) \frac{3!\,(\varDelta h)^3}{(2m+3)!} \pm \cdots \right].$$

Der gesuchte Wert der transzendenten Funktion selbst läßt sich demnach für:

$$-\frac{2\pi}{\Delta} \leqq h \leqq \frac{2\pi}{\Delta}$$

wie folgt darstellen:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \frac{\sin rh}{r^{2m}} = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left[\frac{h}{r^{2m-1}} - \frac{1}{3!} \frac{h^3}{r^{2m-3}} \pm \cdots + (-1)^{m-1} \frac{1}{(2m-1)!} \cdot \frac{h^{2m-1}}{r}\right]$$
$$+ (-1)^{m+1} \left[B(2, \Delta) \frac{\Delta h^{2m+1}}{(2m+1)!} - B(4, \Delta) \frac{3!\,\Delta^3 h^{2m+3}}{(2m+3)!} \pm \cdots\right].$$

Führen wir abermals $2\pi z$ für h ein, so ergibt sich für:

$$-\frac{1}{\Delta} \leqq z \leqq \frac{1}{\Delta}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \frac{\sin 2r\pi z}{r^{2m}} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{r}\right) (-1)^{k-1} \frac{(2\pi z)^{2k-1}}{(2k-1)!\, r^{2m-2k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+m} B(2k, \Delta) \frac{(2k-1)!\, \Delta^{2k-1} (2\pi z)^{2m+2k-1}}{(2m+2k-1)!}.$$

(2) $\Delta < 0$.

Wir legen den folgenden Betrachtungen wiederum von Anfang an zwei Hilfsfunktionen zugrunde, die in den Fällen für ungerade oder gerade Werte von s mit den Funktionen $f_1(x)$ bei positiver Diskriminante übereinstimmen. Es gelten im allgemeinen dieselben Schlüsse, nur bedürfen wir hier der geradzahligen Differentialquotienten. Soweit diese von $b = \infty$ abhängen, verschwinden sie sämtlich und mit ihnen die zugehörigen Reihen. Ferner läßt sich in Übereinstimmung mit den vorigen Untersuchungen beweisen, daß für $s = 2m$ auch die von a abhängige Reihe $a = 0$ selbst den Wert 0 annimmt, so daß sich das Resultat ergibt:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left\{\frac{\sin rh}{(rh)^{2m}} - \frac{1}{(rh)^{2m-1}} \pm \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m-1)!\, rh}\right\} = 0,$$

welches durch geeignete Umformung in die bekannte Gleichung übergeführt werden kann, die für

$$-\frac{1}{\Delta} \leqq z \leqq \frac{1}{\Delta}$$

Geltung besitzt:

$$\frac{2(-1)^m \sqrt{-\Delta}}{(2\pi)^{2m}} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \frac{\sin 2r\pi z}{r^{2m}} = \varphi(z, 2m, \Delta), \qquad m \geqq 1.$$

Für $s = 2m + 1$ ist die von a abhängende Reihe zwar auch konvergent, hat aber einen von Null verschiedenen Wert. Wir erhalten:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left\{\frac{\sin rh}{(rh)^{2m+1}} - \frac{1}{(rh)^{2m}} \pm \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m-1)!\,(rh)^2}\right\}$$
$$= (-1)^{m+1} \left[B(1, \Delta) \frac{1}{(2m+1)!} - B(3, \Delta) \frac{2!\,(-\Delta h)^2}{(2m+3)!} + B(5, \Delta) \frac{4!\,(-\Delta h)^4}{(2m+5)!} \mp \cdots\right].$$

Der Wert der Sinusreihe allein läßt sich dann für $h = 2\pi z$ und:

$$-\frac{1}{-\Delta} \leqq z \leqq \frac{1}{-\Delta}$$

folgendermaßen darstellen:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \frac{\sin 2r\pi z}{r^{2m+1}} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{r}\right) (-1)^{k-1} \frac{(2\pi z)^{2k-1}}{(2k-1)!\, r^{2m-2k+2}}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+m} \frac{(2k-2)!\,(-\Delta)^{2k-2} (2\pi z)^{2m+2k-1}}{(2m+2k-1)!} B(2k-1, \Delta), \qquad m \geqq 0.$$

Im Anschluß hieran wollen wir uns gleich noch die Funktion vorgelegt denken:

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^s},$$

die mit der vorigen im engsten Zusammenhange steht, und zwar sollen anstatt der vier Fälle diesmal nur zwei unter der Voraussetzung, daß $a = 0$ ist, behandelt werden. Es läßt sich leicht nachweisen, daß der Konvergenzbezirk der entstehenden Reihe:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \frac{\cos(a+rh)}{(a+rh)^s}$$

mit dem der Sinusreihe völlig übereinstimmt.

Die Annahme $a = 0$ bedingt die Wahl einer Hilfsfunktion $f_1(x)$:

$$f_1(x) = \frac{\cos x}{x^{2m}} - \frac{1}{x^{2m}} + \frac{1}{2!\,x^{2m-2}} \mp \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m-2)!\,x^2},$$

wobei für $s = 2m$ auch $\Delta > 0$ angenommen sein möge. Wir erhalten dann durch Anwendung unserer Summenformel:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{r}\right) f_1(a+rh) = B(2,\Delta)\,\Delta h \{f_1'(\infty) - f_1'(a)\} + B(4,\Delta)\,(\Delta h)^3 \{f_1'''(\infty) - f_1'''(a)\} + \cdots$$

Nach den bekannten Methoden von Saalschütz ergibt sich nun, daß die Reihe der von $x = \infty$ abhängigen Glieder verschwindet; weiterhin lehrt die leicht herzustellende Form des Differentialquotienten:

$$f_1^{(2n-1)}(x) = (-1)^{m+n} \frac{(2n-1)!}{(2m+2n-1)!} \left\{ \vartheta \sin x - \frac{2m \cdot x \cdot \vartheta' \cdot \cos x}{2m+2n} \right\}, \qquad 0 < \left\{ \begin{matrix} \vartheta \\ \vartheta' \end{matrix} \right\} < 1,$$

daß dasselbe auch für die mit den Größen $a = 0$ gebildete Reihe gilt. Somit finden wir:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left\{ \frac{\cos rh}{r^{2m}} - \frac{1}{r^{2m}} + \frac{h^2}{2!\,r^{2m-2}} \mp \cdots + (-1)^m \frac{h^{2m-2}}{(2m-2)!\,r^2} \right\} = 0.$$

Hieraus folgt aber für $h = 2\pi z$, $-\frac{1}{\Delta} \leqq z \leqq \frac{1}{\Delta}$,

$$\frac{2(-1)^m \sqrt{\Delta}}{(2\pi)^{2m}} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \frac{\cos 2r\pi z}{r^{2m}} = -\{\varphi(z, 2m, \Delta) + B(2m, \Delta)\}, \qquad m \geqq 1, \ \Delta > 0.$$

Für $\Delta < 0$ sei $s = 2m - 1$ gewählt. Dann bedürfen wir der Hilfsfunktion $f_1(x)$:

$$f_1(x) = \frac{\cos x}{x^{2m-1}} - \frac{1}{x^{2m-1}} + \frac{1}{2!\,x^{2m-3}} \mp \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m-2)!\,x},$$

und unsere Summenformel liefert die Gleichung:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{r}\right) f_1(a+rh) = B(1,\Delta)\{f_1(\infty) - f_1(a)\} + B(3,\Delta)(-\Delta h)^2 \{f_1''(\infty) - f_1''(0)\} + \cdots$$

Wiederum verschwinden sämtliche von $x = \infty$ abhängige Glieder, aber auch die mit $a = 0$ gebildeten werden Null, wie aus folgender Darstellung des Differentialquotienten hervorgeht:

$$f_1^{(2n)}(x) = (-1)^{m+n} \frac{(2n)!}{(2m+2n-1)!} \left\{ \vartheta \sin x - \frac{(2m-1)\,\vartheta' x \cos x}{2m+2n} \right\}, \qquad 0 < \left\{ \begin{matrix} \vartheta \\ \vartheta' \end{matrix} \right\} < 1.$$

Es ist also

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left\{\frac{\cos rh}{r^{2m-1}}-\frac{1}{r^{2m-1}}+\frac{h^2}{2!\,r^{2m-3}}\mp\cdots+(-1)^m\frac{h^{2m-2}}{(2m-2)!\,r}\right\}=0.$$

Setzen wir noch $h=2\pi z$, so wird für $-\frac{1}{-\Delta}\underset{(=)}{<}z\underset{(=)}{<}\frac{1}{-\Delta}$.

$$\frac{2(-1)^m\sqrt{-\Delta}}{(2\pi)^{2m-1}}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{\cos 2r\pi z}{r^{2m-1}}=\varphi(z,2m-1,\Delta)+B(2m-1,\Delta),\qquad m\geqq 1,\ \Delta<0.$$

Für $m=1$ sind die Grenzwerte von z ausgeschlossen.

Durch geeignete Spezialisierung in der Anwendung der Summenformel sind wir also imstande, die sämtlichen vier in der Bergerschen Arbeit entwickelten Gleichungen für die verallgemeinerten Bernoullischen Zahlen und Funktionen wiederzugewinnen.

Literaturnachweis.

1) Dirichlet, „Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres". Werke, Bd. I, S. 411 ff.

2) Hurwitz, „Einige Eigenschaften der Dirichletschen Funktionen $F(s)=\sum\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}$, die bei der Bestimmung der Klassenanzahlen binärer quadratischer Formen auftreten". Zeitschr. f. Math. u. Phys., XXVII. Jahrg., 1882, S. 86 ff.

3) Lerch, „Sur quelques analogies des sommes de Gauß." Ber. d. Kgl. Böhm. Ges. d. Wissensch. 1897.

4) Hurwitz, „Über die Anzahl der Klassen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante". Act. math. Bd. 19 (1895), S. 351 ff.

5) De Séguier, „L'expression du nombre des classes, déduite de la transformation des fonctions elliptiques". Compt. Rendus 118, S. 1407 ff.

6) Lerch, „Sur le nombre des classes de formes quadratiques binaires d'un discriminant positif fondamental". Journ. de Mathém. Te 9 1903, S. 377 ff.

7) Hurwitz, „Über eine Darstellung der Klassenanzahl binärer quadratischer Formen durch unendliche Reihen". Crelles Journal, Bd. 129, 1905, S. 187 ff.

8) Glaisher, „Formulae derived from Gauß's sums, with application to the series connected with the number of classes of binary forms". Quart. Journ., Vol. 23, 1902, S. 289 ff.

9) Lerch, „Sur quelques applications des sommes de Gauß". Ann. di Mathem. T. XI, 1905, S. 79 ff.

10) Berger, „Recherches sur les nombres et les fonctions de Bernoulli". Act. math. Bd. 14 (1891), S. 249 ff.

11) De Séguier, „Sur certaines sommes arithmétiques". Journ. de Mathém., Te XV, 1899, S. 55 ff.

12) Krause, „Zur Theorie der Mac-Laurinschen Summenformel". Archiv d. Math. u. Phys. III. Reihe, V., S. 179 ff.

13) Krause, „Zur Theorie der Eulerschen und Bernoullischen Zahlen". Monatshefte für Math. u. Phys. XIV. Jahrg., S. 305 ff.

14) Krause, „Zur Theorie der ultrabernoullischen Zahlen und Funktionen". Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. 1902, S. 139 ff.

15) Saalschütz, „Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen". 1893.

16) Wicke, „Über ultrabernoullische und ultraeulersche Zahlen und Funktionen". Dissertation, Jena 1905.

17) Bachmann, „Analytische Zahlentheorie". 1894.

Ich, Georg Paul Dolze, wurde geboren am 18. Januar 1875 zu Dresden. Ich widmete mich anfangs dem Berufe eines Volksschullehrers, legte später an der Dreikönigschule in Dresden (Realgymnasium) die Reifeprüfung ab und studierte von Michaelis 1900 an Mathematik und Physik an der Königl. Technischen Hochschule in Dresden und der Universität Rostock. Nachdem ich am 24. Oktober 1905 in Dresden die Prüfung für Kandidaten des höheren Lehramtes bestanden hatte, erhielt ich sofort Anstellung als wissenschaftlicher Lehrer am Realgymnasium zu Freiberg i. Sa. und von Ostern 1906 ab am Annenrealgymnasium in Dresden.

Vorliegende Arbeit wurde begonnen im Mathematischen Seminare der Königl. Technischen Hochschule zu Dresden, an dem ich unter Leitung des Herrn Geh. Hofrates Prof. Dr. M. Krause mehrere Semester teilnahm. Es ist mir ein dringendes Bedürfnis, meinem verehrten Lehrer, Herrn Geheimrat Krause, für die vielen wertvollen Anregungen und die liebenswürdige Unterstützung bei der Abfassung der Arbeit auch hierdurch meinen herzlichsten Dank zum Ausdruck zu bringen.


DUE OCT 20 '41
DUE APR 18 '44